

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 2 (22)

2012

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Фролов А. Г.</i> Метод коллокации для спектральных задач теории диэлектрических волноводов	3
<i>Нагорный А. С.</i> О свойствах предполных классов в P_3	16
<i>Халютин С. П., Старостин И. Е.</i> Потенциально-поточковый квазиградиентный метод моделирования неравновесных процессов	25
<i>Козлов М. В., Щенников В. Н.</i> Ограниченность решений систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений	36
<i>Валовик Д. В.</i> Задача сопряжения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в плоском двухслойном нелинейном диэлектрическом волноводе	43
<i>Пасиков В. Л.</i> Игровые задачи наведения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла	50
<i>Зарембо Е. В.</i> Численный метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью	59
<i>Гришина Е. Е.</i> Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения	75
<i>Бойков И. В.</i> Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием	85
<i>Мамедова Т. Ф., Десяев Е. В., Ляпина А. А.</i> Устойчивость математических моделей типа «хищник-жертва»	98

ФИЗИКА

<i>Суворова Л. А., Бувев А. Р.</i> Расчет индуктивности образца в сверхпроводящем состоянии и ее влияние на переход в критическое состояние	106
<i>Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Зайцев Р. В., Козенко С. Е., Манухина М. А.</i> Влияние диэлектрической матрицы на туннельные вольт-амперные характеристики в квантовых точках в условиях внешнего электрического поля	119

Позднякова О. Д., Шорохов А. В. Бихроматическое поле накачки как эффективное средство управления усилением терагерцевого излучения в полупроводниковой сверхрешетке	136
Кревчик В. Д., Разумов А. В., Козенко С. Е., В. А. Рудин Резонансные состояния доноров в квантовых ямах во внешних электрическом и магнитном полях	145
Аверин И. А., Карманов А. А., Мошников В. А., Печерская Р. М., Пронин И. А. Особенности синтеза и исследования нанокompозитных пленок, полученных методом золь-гель-технологии	155
Аверин И. А., Пронин И. А. Особенности фазового состояния неравновесных термодинамических систем полимер-растворитель	163
Кудряцев В. В., Ильин В. А. История радиофизики – важнейшее направление в истории физики	170
Мартыненко В. А., Ханугин А. А., Ницев К. Н., Новопольцев М. И. Расчет напряженно-деформированных состояний в элементах конструкции силовых полупроводниковых модулей с паяными контактами	185
Голованов О. А., Макеева Г. С., Ефимов А. А., Чиркина М. А. Вероятностная модель микроволнового магнитного резонанса в 3D-магнитных нанокompозитах из опаловых матриц	195

УДК 517.9

А.Г. Фролов

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ¹

Аннотация. Для численного решения задач о поверхностных и вытекающих собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода в полупространстве предлагается метод коллокации. Он обосновывается теоретически и практически.

Ключевые слова: диэлектрический волновод, задача на собственные значения, интегральные уравнения, метод коллокации.

Abstract. The author suggests a collocation method to solve problems on surface eigenwaves and leaky eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguide in the half-space. This method is investigated theoretically and practically.

Key words: dielectric waveguide, eigenvalue problem, integral equations, collocation method.

Введение

Ряд спектральных задач теории диэлектрических волноводов сводится к линейным и нелинейным задачам поиска характеристических чисел двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений [1–3]. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации [4, 5]. В настоящей статье предлагается реализация метода коллокации для поиска поверхностных (линейная задача) и вытекающих (нелинейная задача) собственных волн слабонаправляющего волновода в полупространстве. Для обеих задач доказываются теоремы сходимости и приводятся результаты численных экспериментов.

1. Метод коллокации для задачи о поверхностных собственных волнах

Опишем метод коллокации приближенного решения линейной спектральной задачи о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве [3]:

$$u = \lambda T(\sigma)u. \quad (1)$$

Здесь

$$(T(\sigma))u(x) = \int_{\Omega} K(\sigma; x, y)u(y)dy, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-97009.

$$K(\sigma; x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(K_0(\sigma |x - y|) - K_0(\sigma |x - y^*|) \right) p(x)p(y),$$

где Ω – область поперечного сечения волновода – ограниченная область в верхней полуплоскости $R_+^2 = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}$, целиком лежащая в полукруге радиуса R с центром в начале координат; K_0 – функция Макдональда (см., напр., [6]), $y^* = (y_1, -y_2)$, $p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} > 0$; n – непрерывный в Ω показатель преломления волновода; $n_\infty > 0$ – постоянный показатель преломления окружающей среды, $n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x)$, $\sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 n_\infty^2} > 0$ – мнимая часть поперечного волнового числа; $\beta > 0$ – постоянная распространения; $\omega > 0$ – частота электромагнитных колебаний; $\lambda = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2) > 0$, $\epsilon_0 (\mu_0)$ – электрическая (магнитная) постоянная. При каждом фиксированном значении $\sigma > 0$ необходимо найти все характеристические числа λ и отвечающие им собственные функции u оператора $T(\sigma)$.

При построении и теоретическом обосновании сходимости метода коллокации будем опираться на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения линейных спектральных задач для многомерных слабосингулярных интегральных уравнений [4]. Ядро K слабо полярно, поэтому, если $\partial\Omega$ – липшицева кривая и решение задачи (1) существует в $L_2(\Omega)$, то собственные функции u принадлежат [7] пространству вещественных непрерывных функций $C(\bar{\Omega})$ с нормой

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|. \quad (3)$$

Будем рассматривать оператор T как оператор, действующий в пространстве $C(\bar{\Omega})$. Проведем регулярную триангуляцию области Ω , следуя, напр., [8]. Будем использовать такие треугольники $\Omega_{j,h}$ с прямолинейными границами, что $\Omega_{i,h} \cap \Omega_{j,h} = \emptyset$, если $i \neq j$. Пусть $\max_{1 \leq j \leq N_h} \text{diam}(\Omega_{j,h}) \leq h$, где

N_h – число треугольников. Обозначим символом $\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{N_h} \Omega_{j,h} \subseteq \Omega$ дискрет-

ный аналог области Ω , а через $\Xi_h = \{\xi_{j,h}\}_{j=1}^{N_h}$ – сетку на области Ω , такую что $\xi_{j,h}$ – центр тяжести $\Omega_{j,h}$, $j = 1, \dots, N_h$. Ясно, что $\text{dist}(x, \Xi_h) \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $x \in \Omega$, где $\text{dist}(x, \Xi_h) = \min_{\xi_{j,h} \in \Xi_h} |x - \xi_{j,h}|$.

Обозначим $E = C(\bar{\Omega})$ и введем пространство функций $E_h = C(\Xi_h)$, заданных на сетке Ξ_h , с нормой $\|u_h\|_{E_h} = \max_{1 \leq j \leq N_h} |u_h(\xi_{j,h})|$, $u_h \in E_h$. Определим оператор $p_h : E \rightarrow E_h$ сужения функции $u \in E$ на сетку Ξ_h : $p_h u \in E_h$ – сеточная функция со значениями $(p_h u)(\xi_{j,h}) = u(\xi_{j,h})$, $j = 1, \dots, N_h$.

Семейство $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ элементов $u_h \in E_h$ называется дискретно сходящимся [4] к элементу $u \in E$, если $\|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Будем обозначать дискретную сходимость так: $u_h \rightarrow u$. В рассматриваемом нами случае дискретная сходимость $u_h \rightarrow u$ означает, что $\max_{1 \leq j \leq N_h} |u_h(\xi_{j,h}) - u(\xi_{j,h})| \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

Очевидно, $\|p_h\|_{L(E, E_h)} = 1$, и оператор $p_h \in L(E, E_h)$ (через $L(E, E_h)$ обозначено пространство линейных ограниченных операторов $p_h : E \rightarrow E_h$) удовлетворяет условию: $\|p_h u\|_{E_h} \rightarrow \|u\|_E, h \rightarrow 0$ для любого $u \in E$.

Приближенное решение интегрального уравнения (1) будем разыскивать в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_h(\xi_{j,h}) \varphi_{j,h} \in L_\infty(\Omega), \quad (4)$$

где $\varphi_{j,h}(x) = 1$ при $x \in \Omega_{j,h}$, $\varphi_{j,h}(x) = 0$ при $x \notin \Omega_{j,h}$.

В интегральном уравнении (1) аппроксимируем область интегрирования Ω областью Ω_h , заменим u на $u^{(h)}$ и запишем полученное равенство в точках $\xi_{i,h}$. Получим конечномерную линейную спектральную задачу:

$$u_{i,h} = \lambda \sum_{j=1}^{N_h} u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N_h, \quad (5)$$

где $u_{j,h} = u_h(\xi_{j,h})$.

Введем дискретный аналог оператора T – оператор T_h , действующий в E_h :

$$(T_h u_h)(\xi_{i,h}) = \sum_{j=1}^{N_h} u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy. \quad (6)$$

Семейство $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ операторов $T_h \in L(E_h, E_h)$ называется дискретно сходящимся [4] к оператору $T \in L(E, E)$, если из $u_h \rightarrow u$ следует, что $T_h u_h \rightarrow T u$. Дискретную сходимость семейства операторов будем обозначать через $T_h \rightarrow T$. Будем говорить, что семейство $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ операторов $T_h \in L(E_h, E_h)$ сходится к оператору $T \in L(E, E)$ дискретно компактно, если $T_h \rightarrow T$, и, кроме того, из $\|u_h\|_{E_h} < \text{const}, h \in (0, \bar{h})$, следует, что семейство $(T_h u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ дискретно компактно. Отметим, что согласно [4] семейство $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ элементов $u_h \in E_h$ называется дискретно компактным,

если любая последовательность u_{h_n} , для которой $h_n \rightarrow 0$, содержит дискретно сходящуюся подпоследовательность.

Обозначим через $\text{sp}(T) = \{\lambda > 0 : \exists 0 \neq u \in E, u = \lambda Tu\}$ спектр оператора T , а через $\text{sp}(T_h)$ – спектр оператора T_h .

Теорема 1. Для любого $0 \neq \lambda_0 \in \text{sp}(T)$ существует такое семейство $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$, что $\lambda_h \rightarrow \lambda_0$ при $h \rightarrow 0$. С другой стороны, если $\text{sp}(T_h) \ni \lambda_h \rightarrow \lambda_0$ при $h \rightarrow 0$, то $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$. Если $n \in C^2(\Omega)$, а характеристическое число $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ простое, то имеет место оценка $|\lambda_h - \lambda_0| \leq ch^2$.

Доказательство. Оператор $T_h \in L(E_h, E_h)$ – конечномерный. Оператор $T \in L(E, E)$ – вполне непрерывный (в силу леммы 2.2 [4]). Следовательно, по теореме 4.2 [4] достаточно показать, что семейство $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$ операторов $T_h \in L(E_h, E_h)$ сходится к оператору $T \in L(E, E)$ дискретно компактно и для $u_0 = \lambda_0 T u_0$ получить оценку

$$\|T_h p_h u_0 - p_h T u_0\|_{E_h} \leq ch^2, \quad h \rightarrow 0. \quad (7)$$

Доказательство дискретной компактной сходимости проводится аналогично доказательству леммы 5.2 [4]. Для доказательства оценки (7) необходимо прежде всего заметить, что если $n \in C^2(\Omega)$, то любая собственная функция задачи (1) принадлежит [4] пространству $C^{2,0}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| + \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{1 + \ln \rho(x)} \right) D^2 u(x),$$

где $\rho(x) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$.

Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.3 [4]. Теорема доказана.

2. Метод коллокации для задачи о вытекающих собственных волнах

Задача о вытекающих собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве формулируется в виде нелинейной спектральной задачи для фредгольмовой голоморфной оператор-функции [3]:

$$A(\omega, \beta)u = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$A(\omega, \beta) = I - \lambda(\omega)T(\omega, \beta); \quad (9)$$

$$(T(\omega, \beta)u)(x) = \int_{\Omega} K(\omega, \beta; x, y)u(y)dy, \quad x \in \Omega;$$

$$K(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} \left(H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y|) - H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y^*|) \right) p(x)p(y),$$

где $\chi(\omega, \beta) = \sqrt{\omega^2 n_\infty^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2}$; $H_0^{(1)}$ – функции Ханкеля первого рода нулевого порядка (см., напр., [6]), остальные обозначения введены в первом пункте. Для каждой фиксированной частоты $\omega > 0$ необходимо найти все постоянные распространения β , принадлежащие «нефизическому» листу $\Lambda_0^{(2)}$ римановой поверхности Λ функции $\ln \chi(\beta)$, определяемому условиями:

$$\Lambda_0^{(2)} = \{\beta \in \Lambda : -\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \operatorname{Im}(\chi(\beta)) < 0\}.$$

При построении метода коллокации операторное уравнение (8) удобно трактовать как уравнение в банаховом пространстве комплекснозначных непрерывных функций $E = C(\bar{\Omega})$ с нормой (3). Исследование сходимости метода проведем, опираясь на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых голоморфных оператор-функций [9].

Триангуляцию области Ω проведем так, как описано в разд. 1, но для согласования наших обозначений с принятыми в [9] j -й треугольник обозначим Ω_j , число треугольников – n , дискретный аналог области Ω – символом $\Omega_n = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j \subseteq \Omega$, сетку из точек коллокации на области Ω – через

$\Xi_n = \{\xi_j\}_{j=1}^n$, а функцию $\varphi_{j,h}$ – символом φ_j . Пространство C^n наделим нормой:

$$\|u_n\|_{C^n} = \max_{1 \leq j \leq n} |u_{n,j}|, \quad u_n \in C^n,$$

где $u_{n,j}$ есть j -я компонента вектора u_n . Оператор, определяющий сужение функции $u \in E$ на сетку Ξ_n , обозначим $p_n \in L(E, C^n)$.

Пусть N – множество всех натуральных чисел. Через N' , N'' и т.д. обозначим бесконечные подмножества множества натуральных чисел N . Под сходимостью $z_n \rightarrow z$, $n \in N'$, будем понимать сходимость при $n \rightarrow \infty$, когда индекс n пробегает множество N' . Согласно [9] последовательность $\{u_n\}_{n \in N'}$ векторов $u_n \in C^n$ называется дискретно сходящейся к пределу $u \in E$, если $\|u_n - p_n u\|_{C^n} \rightarrow 0$, $n \in N'$. Будем обозначать это так: $u_n \rightarrow u$, $n \in N'$. Поясним, что дискретная сходимость $u_n \rightarrow u$, $n \in N'$, означает при используемой в пространстве C^n норме, что $\max_{1 \leq j \leq n} |u_{n,j} - u(\xi_j)| \rightarrow 0$, $n \in N'$.

Разыскивая приближенное решение интегрального уравнения (8) в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n u_{n,j} \varphi_j(x) \in L_\infty(\Omega), \quad (10)$$

аппроксимируя область интегрирования Ω областью Ω_n и записывая полученное равенство в точках коллокации, получаем конечномерную спектральную задачу:

$$u_{n,i} = \lambda \sum_{j=1}^n u_{n,j} \int_{\Omega_j} K(\beta, \xi_i, y) dy, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение дискретные аналоги операторов T и A – операторы, действующие в C^n :

$$(T_n u_n)(\xi_i) = \sum_{j=1}^n u_{n,j} \int_{\Omega_j} K(\beta, \xi_i, y) dy, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$A_n(\beta) = I - \lambda T_n(\beta), \quad A_n(\beta): C^n \rightarrow C^n,$$

где I – единичный оператор в C^n .

Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N'}$ существенно сходится к оператору $A: E \rightarrow E$, определенному равенством (8), если выполнены условия:

$$u_n \rightarrow u, \quad n \in N' \Rightarrow A_n u_n \rightarrow Au, \quad n \in N', \quad (12)$$

$$\|u_n\| \leq \text{const}, \quad \{A_n u_n\}_{n \in N'} P\text{-компактна} \Rightarrow \{u_n\}_{n \in N'} P\text{-компактна}. \quad (13)$$

Отметим, что согласно [9] последовательность $\{u_n\}_{n \in N'}$ называется дискретно компактной, или P -компактной, если для каждого $N'' \subseteq N'$ существует такое подмножество чисел $N''' \subseteq N''$, что последовательность $\{u_n\}_{n \in N'''}$ сходится к некоторому пределу $u \in E$.

Обозначим символом $\sigma(A)$ характеристическое множество оператора $A(\beta)$, символом $\sigma(A_n)$ – характеристическое множество оператора $A_n(\beta)$. Приближенные значения β_n постоянных распространения β будем искать как характеристические значения оператора $A_n(\beta)$. Относительно сходимости описанного метода справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $\beta_0 \in \sigma(A)$, то существует такая последовательность чисел $\{\beta_n\}_{n \in N}$, $\beta_n \in \sigma(A_n)$, что $\beta_n \rightarrow \beta_0, n \in N$. Если $\{\beta_n\}_{n \in N}$ – некоторая последовательность точек из Λ такая, что $\beta_n \in \sigma(A_n), \beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda, n \in N$, то $\beta_0 \in \sigma(A)$. Пусть $\{\beta_n\}_{n \in N}$ – некоторая последовательность точек из Λ ; $\{v_n\}_{n \in N}$ – последовательность нормированных векторов; $\|u_n\|_{C^n} = 1$ такие, что $\beta_n \in \sigma(A_n)$; кроме того, $A_n(\beta_n)u_n = 0, \beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$, а $u_n \rightarrow u_0, n \in N$. Тогда $\beta_0 \in \sigma(A)$ и $A(\beta_0)u_0 = 0, \|u\|_E = 1$.

Доказательство теоремы заключается в проверке условий 1–6 теорем 1 и 2 [9] в рассматриваемом случае.

1. Оператор $p_n: E \rightarrow C^n$ очевидно линеен и обладает свойством

$$\|p_n u\|_{C^n} \rightarrow \|u\|_E, \quad n \in N, \quad \forall u \in E.$$

2. Оператор-функции $A(\beta)$ и $A_n(\beta)$ голоморфны на Λ . Это можно доказать, рассуждая аналогично [10, с. 459].

3. При любом $\beta \in \Lambda$ операторы $A(\beta)$ и $A_n(\beta)$ фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности оператора $T(\beta): E \rightarrow E$ (см. лемму 2.2 [4]) и конечномерности оператора $T_n(\beta)$.

4. Для любого $\beta \in \Lambda$ последовательность операторов $\{A_n(\beta)\}_{n \in N}$ собственнo сходитсн к оператору $A(\beta)$. Покажем сначала, что выполняется условие (12). Очевидно, что

$$\|A_n u_n - p_n A u\|_{C^n} \leq \|A_n u_n - A_n p_n u\|_{C^n} + \|A_n p_n u - p_n A u\|_{C^n}. \quad (14)$$

Для вектора $p_n u \in C^n$ определим кусочно-постоянную функцию $u^{(n)}$ по формуле (10). Ясно, что тогда $A_n p_n u = p_n A u^{(n)}$, где $A: L_\infty(\Omega) \rightarrow E$, следовательно,

$$\|A_n p_n u - p_n A u\|_{C^n} \leq \|p_n\|_{E \rightarrow C^n} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(n)} - u\|_{L_\infty}. \quad (15)$$

Объединяя неравенства (14) и (15), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|A_n u_n - p_n A u\|_{C^n} &\leq \|A_n\|_{C^n \rightarrow C^n} \|u_n - p_n u\|_{C^n} + \\ &+ \|p_n\|_{E \rightarrow C^n} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(n)} - u\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ясно, что $\|p_n\|_{E \rightarrow C^n} = 1$, и

$$\|u^{(n)} - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0, \quad n \in N. \quad (17)$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|A(\beta)\|_{L_\infty \rightarrow E} \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (18)$$

где $c(\beta)$ – непрерывная в области Λ функция: $c(\beta) = 1 + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(\beta, x, y)| dy$.

Из определения оператора $A_n(\beta)$ вытекает, что

$$\|A_n(\beta)\|_{C^n \rightarrow C^n} \leq \|A(\beta)\|_{L_\infty \rightarrow E}, \quad n \in N, \quad \beta \in \Lambda. \quad (19)$$

Теперь можно заключить, что условие (12) выполняется в силу (16)–(19).

Проверим условие (13). P -компактность последовательности векторов $\{A_n u_n\}_{n \in N}$ означает, что для любого $N' \subseteq N$ существует такое подмножество $N'' \subseteq N'$, что последовательность $\{A_n u_n = u_n + T_n u_n\}_{n \in N''}$ P -сходится к некоторому $w \in E$. Для $u_n \in C^n$ определим функцию $u^{(n)} \in L_\infty(\Omega)$ по формуле (10). Так как $\|u_n\|_{C^n} \leq \text{const}$, то $\|u^{(n)}\|_{L_\infty} \leq \text{const}$ при $n \in N''$. Оператор

$T: L_\infty(\Omega) \rightarrow E$ вполне непрерывен [4, с. 14]. Следовательно, множество $\{Tu^{(n)}\}_{n \in N''}$ относительно компактно. Значит, из любой последовательности $\{Tu^{(n)}\}_{n \in N''}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{Tu^{(n)}\}_{n \in N'''}$, т.е. $\|Tu^{(n)} - v\|_E \rightarrow 0, n \in N'''$, $v \in E$. Отсюда в силу неравенства $\|T_n u_n - p_n v\|_{C^n} \leq \|p_n\|_{E \rightarrow C^n} \|Tu^{(n)} - v\|_E$ и $\|p_n\|_{E \rightarrow C^n} = 1$ следует, что последовательность $\{T_n u_n\}_{n \in N'''}$ P -сходится к $v \in E$. Таким образом, последовательность $\{u_n\}_{n \in N'''}$ P -сходится к вектору $u = w - \lambda v \in E$, и условие (13) выполнено.

5. Нормы $\|A_n(\beta)\|_{C^n \rightarrow C^n}$ ограничены равномерно по n и β на каждом компакте $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (18) и (19).

6. Множество $\rho(A)$ не пусто, т.е. $\sigma(A) \neq \Lambda$. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы 3 [1]. Теорема доказана.

3. Результаты численных экспериментов

При теоретическом обосновании метода коллокации предполагалось, что интегралы в (5) и (11) вычисляются точно. В ходе реальных вычислений внедиагональных элементов матриц подынтегральные выражения аппроксимировались их значениями в точках коллокации. Интегралы, отвечающие диагональным элементам, имеют логарифмическую особенность. Поэтому подынтегральные выражения представлялись в виде суммы $\ln|\xi_i - y|$ и непрерывной функции, которая аппроксимировалась ее значением в точке коллокации. Для вычисления интеграла от $\ln|\xi_i - y|$ по треугольнику Ω_i последний разбивался на две области: $\Omega_i = B_{R_i}(\xi_i) \cup (\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i))$, где $B_{R_i}(\xi_i)$ – круг с центром в точке коллокации, радиус которого равен расстоянию от ξ_i до ближайшей стороны треугольника. Интеграл от $\ln|\xi_i - y|$ по $B_{R_i}(\xi_i)$ вычисляется аналитически, в интеграле по $\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)$ расстояние $|\xi_i - y|$ приближенно полагалось равным R_i .

Для каждого $\sigma > 0$ оператор $T(\sigma)$, определенный равенством (2), является самосопряженным, однако в силу того, что $\Omega_i \neq \Omega_j$ при $i \neq j$, матрица, построенная описанным методом для решения задачи (5) получается несимметричной. Поэтому она дополнительно была симметризована умножением на матрицу $\text{diag}(|\Omega|_1, |\Omega|_2, \dots, |\Omega|_{N_h}) / |\Omega|^2$, где $|\Omega|$ – максимальная площадь треугольника. Таким образом, задача (5) сводится к обобщенной линейной задаче на собственные значения вида $Bu = \lambda BA(\sigma)u$ для симметричных положительных матриц. При каждом фиксированном σ из некоторого интервала положительной полуоси вычислялись сразу несколько первых собственных значений и отвечающих им собственных функций методом Арнольди [11].

Задача (11) при фиксированном $\lambda > 0$ сводится к спектральной задаче вида $A(\beta)u = 0$, где A – матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями комплексного параметра β , u – вектор с комплексными компонентами. Для решения этой задачи использовался вариант метода обратных итераций с невязкой, предложенный в работе [12].

В ходе численных экспериментов задачи (5) и (11) решались для областей Ω двух форм: 1) единичный полукруг с центром в начале координат, лежащий на прямой L ; 2) прямоугольник с отношением сторон $1/2$, середина большей стороны которого совпадает с началом координат, а длина меньшей стороны равна единице.

На рис. 1 изображены дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн полукруглого и прямоугольного волноводов в полупространстве с постоянным показателем преломления. Поверхностным волнам соответствуют графики $\sigma = \sigma(\lambda)$, $\text{Im}\chi = \sigma > 0$. Значения λ , при которых $\sigma = 0$, называются точками отсечки. При переходе через точки отсечки поверхностные волны трансформируются в вытекающие, у параметра χ появляется вещественная часть.

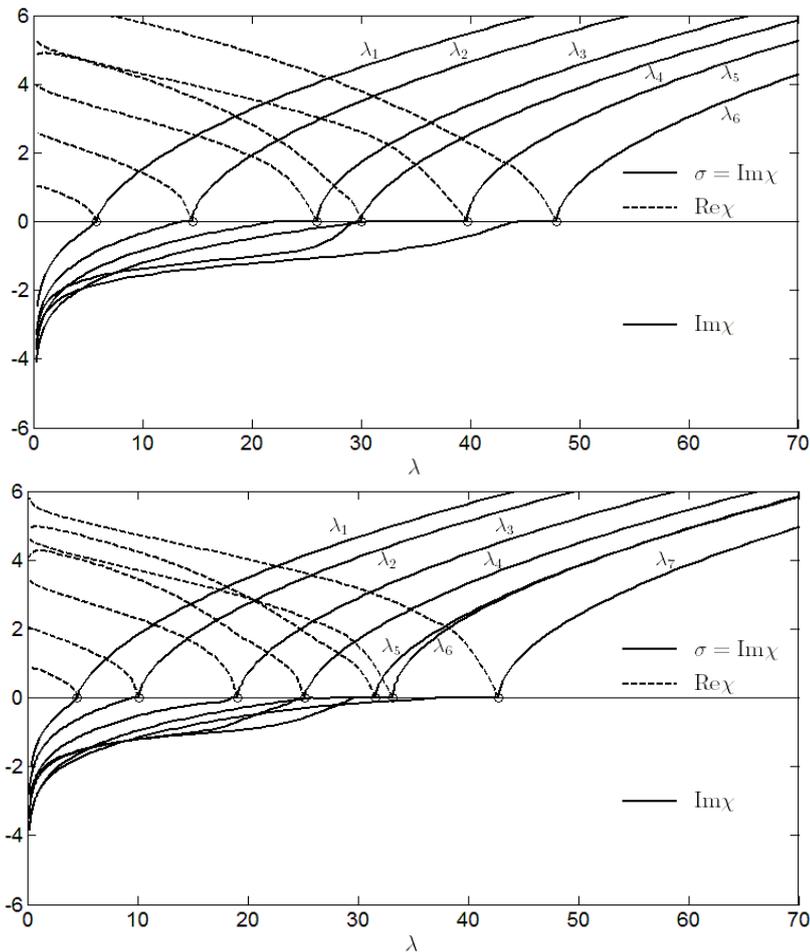


Рис. 1. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн полукруглого (сверху) и прямоугольного (снизу) волноводов в полупространстве

На рис. 2 и 3 изображены линии уровня собственных функций задач о поверхностных и вытекающих собственных волнах для полукруглого и прямоугольного волноводов в полупространстве.

Представим теперь результаты исследования зависимости точности вычислений от числа точек коллокации N . При $\sigma=1$ и разных N вычислялись приближенные собственные значения $\tilde{\lambda}_6$ задачи о поверхностных собственных волнах. Затем они сравнивались с $\lambda_6 = 50,8596$, вычисленном при $N = 8096$ для полукруглого волновода, и с $\lambda_6 = 35,2225$, полученном при $N = 8032$ для прямоугольного волновода. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Приближенные собственные значения $\tilde{\lambda}_6$ задачи о поверхностных волнах для полукруглого и прямоугольного волноводов в полупространстве; $\sigma = 1$

Полукруглый волновод						
N	61	240	506	1059	2024	4236
h	0,3531	0,1693	0,1210	0,0863	0,0605	0,0432
$\tilde{\lambda}_6$	39,3336	48,0972	49,5528	50,2392	50,5952	50,7702
e	1,8172	1,8956	1,7561	1,6377	1,4209	0,9432
ε	0,2266	0,0543	0,0257	0,0122	0,0052	0,0018
Прямоугольный волновод						
N	64	320	664	1280	2656	4800
h	0,3896	0,1598	0,1125	0,0799	0,0562	0,0454
$\tilde{\lambda}_6$	29,4901	33,6530	34,4707	34,8661	35,0785	35,1684
e	1,0720	1,7450	1,6866	1,5850	1,2929	0,7459
ε	0,1627	0,0446	0,0213	0,0101	0,0041	0,0015

В табл. 1 приведена зависимость от N следующих величин: относительной ошибки $\varepsilon = |\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6| / \lambda_6$ и величины $e = \varepsilon / h^2$, где h – максимальная длина стороны треугольника. Видно, что с увеличением числа N относительная погрешность ε убывает. Результаты аналогичного исследования сходимости для вытекающих волн приведены в табл. 2.

Таблица 2

Приближенные характеристические значения $\tilde{\chi}_4$ задачи о вытекающих волнах для полукруглого и прямоугольного волноводов в полупространстве

Полукруглый волновод				
N	240	506	1059	2024
h	0,1693	0,1210	0,0863	0,0605
$\tilde{\chi}_4$	$2,7616 - 0,9311i$	$2,7897 - 1,0195i$	$2,7978 - 1,0556i$	$2,8020 - 1,0715i$
e	1,8019	1,4209	1,1408	0,8241
ε	0,0516	0,0208	0,0085	0,0030
Прямоугольный волновод				
N	320	664	1280	2656
h	0,1598	0,1125	0,0799	0,0562
$\tilde{\chi}_4$	$2,6492 - 0,9372i$	$2,6523 - 1,0056i$	$2,6597 - 1,0224i$	$2,6612 - 1,0389i$
e	1,4703	1,0922	1,1777	0,5662
ε	0,0375	0,0138	0,0075	0,0018

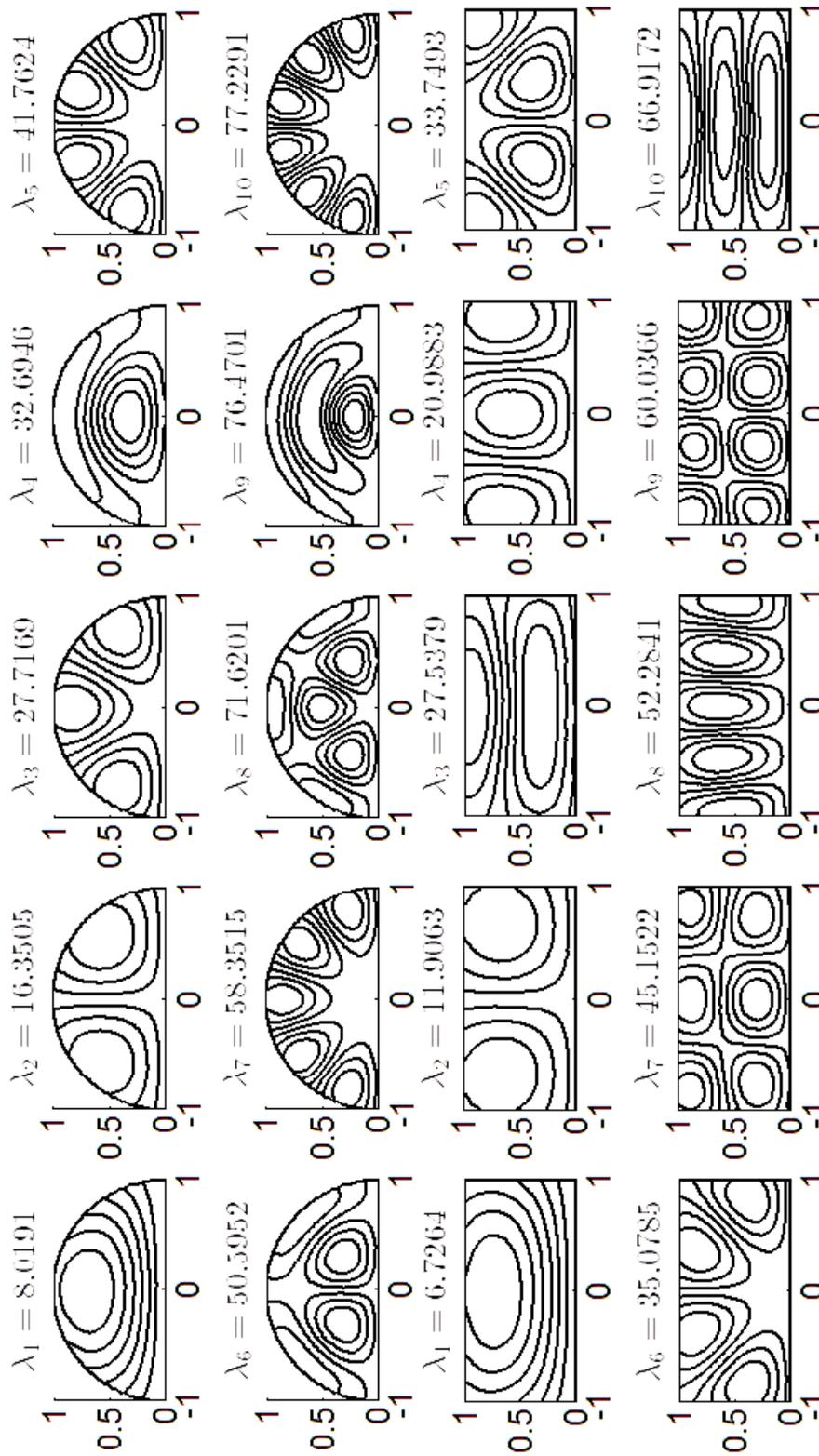


Рис. 2. Линии уровня собственных функций задачи о поверхностных волнах для полукруглого (сверху) и прямоугольного (снизу) волноводов в полупространстве; $\sigma = 1$

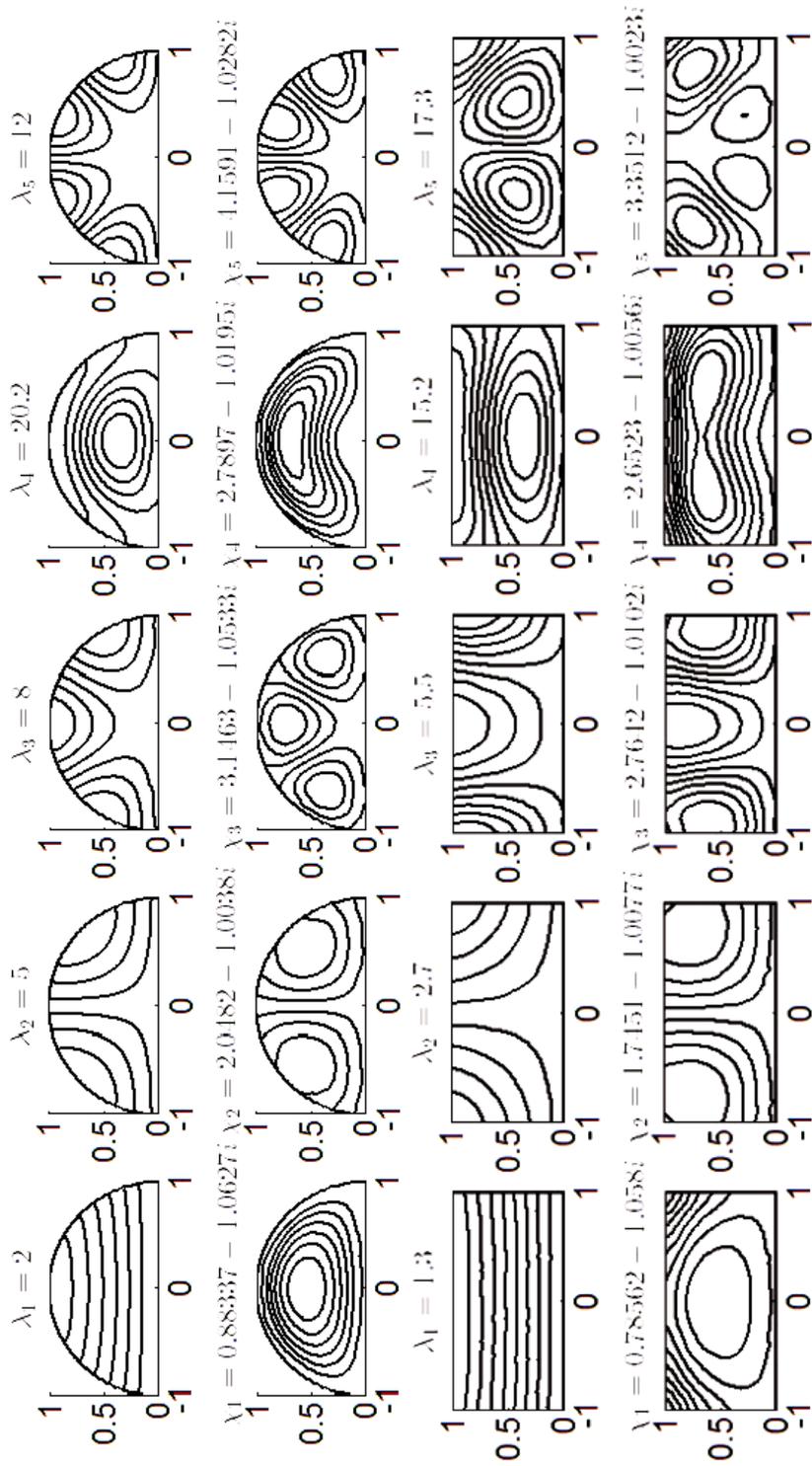


Рис. 3. Линии уровня собственных функций задачи о вытекающих волнах для полукруглого (сверху) и прямоугольного (снизу) волноводов. В первом и третьем рядах показаны вещественные части функции u , во втором и четвертом – мнимые

Значение $\chi_4 = 2,8042 - 1,0803i$, с которым сравнивались значения $\tilde{\chi}_4$, полученные при меньшем количестве треугольников, вычислено для полукруглого волновода при $N = 4236$ и $\lambda_4 = 20,2$. Для прямоугольного волновода $\chi_4 = 2,6630 - 1,0437i$ при $N = 4800$ и $\lambda_4 = 15,2$.

Автор благодарит Е. М. Карчевского за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. **Даутов, Р. З.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2009. – 271 с.
2. **Карчевский, Е. М.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 1. – С. 47–57.
3. **Карчевский, Е. М.** Собственные волны слабонаправляющего волновода в полупространстве / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1. – С. 22–30.
4. **Vainikko, G.** Multidimensional weakly singular integral equations / G. Vainikko. – Springer, 1993. – 159 p.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
6. **Янке, Е.** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1968. – 344 с.
7. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.
8. **Даутов, Р. З.** Введение в теорию метода конечных элементов / Р. З. Даутов, М. М. Карчевский. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2004. – 239 с.
9. **Вайникко, Г. М.** О скорости сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г. М. Вайникко, О. О. Карма // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1393–1408.
10. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.
11. **Lehoucq, R. B.** Deflation techniques for an implicitly re-started Arnoldi iteration / R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen // SIAM J. Matrix Analysis and Applications. – 1996. – V. 17. – P. 789–821.
12. **Neumaier, A.** Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. – 1985. – V. 22, № 5. – P. 914–923.

Фролов Александр Геннадьевич
аспирант, Казанский (Приволжский)
федеральный университет

Frolov Alexander Gennadyevich
Postgraduate student, Kazan
(Volga region) Federal University

E-mail: ekarchev@yandex.ru

УДК 517.9

Фролов, А. Г.

Метод коллокации для спектральных задач теории диэлектрических волноводов / А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 3–15.

О СВОЙСТВАХ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ В P_3 ¹

Аннотация. Доказываются 27 свойств, связывающих предполные классы трехзначной логики.

Ключевые слова: трехзначная логика, предполный класс.

Abstract. The article proves 27 qualities binding precomplete classes of ternary logic.

Key words: three-valued logic, precomplete class.

Введение

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$; $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k – множество всех конечноместных функций на E_k . Элементы множества P_k будем называть функциями k -значной логики, или k -значными функциями. Определения используемых ниже операции суперпозиции, замыкания и замкнутого класса можно найти в [1].

Замкнутый (относительно суперпозиции) класс H функций k -значной логики назовем *предполным в P_k* , если $H \neq P_k$, но для любой функции $f \in P_k \setminus H$ замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_k .

Все предполные классы в P_2 были найдены Э. Постом в [2, 3], все предполные классы в P_3 были описаны С. В. Яблонским в [4]. Затем для любого $k \geq 3$ С. В. Яблонским и А. В. Кузнецовым было установлено, что число предполных в P_k классов конечно [5], а И. Розенберг описал предикаты, определяющие все предполные в P_k классы [6, 7].

1. Некоторые свойства пересечений предполных классов в P_3

Как известно [4], в трехзначной логике имеется ровно 18 предполных классов:

M_0, M_1, M_2 – классы функций, монотонных относительно порядка $2 < 0 < 1$, $0 < 1 < 2$ и $1 < 2 < 0$ соответственно;

U_0, U_1, U_2 – классы функций, сохраняющих разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 0\}\}$ и $\{\{2\}, \{0, 1\}\}$ соответственно;

C_0, C_1, C_2 – классы функций, сохраняющих 2-местный предикат $((x = y) \vee \sigma \in \{x, y\})$ для любого $\sigma \in E_3$;

T_0, T_1, T_2 – классы функций, сохраняющих константу 0, 1 и 2 соответственно;

T_{12}, T_{02}, T_{01} – классы функций, сохраняющих множество $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ и $\{0, 1\}$ соответственно;

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00701).

B – класс Слупецкого (все трехзначные функции, имеющие либо не более одной существенной переменной, либо принимающие не более двух значений);

S – класс функций, самодвойственных относительно перестановки (120);

L – класс линейных функций (над полем Галуа $GF(3)$).

Отметим, что в P_3 имеются тройки попарно двойственных классов (это классы M_i, U_i, C_i, T_i и T_{ij}).

Нам будет удобно обозначать через \overline{K} дополнение множества функций K трехзначной логики до всего P_3 , т.е. $\overline{K} = P_3 \setminus K$. Обозначим через $E(f)$ множество значений функции f . Всюду в этой статье сложение и умножение будем вычислять по модулю 3.

Пусть $f, g \in P_3$. Будем говорить, что функция g является *подфункцией* функции f , если g можно получить подстановкой в функцию f вместо некоторых ее переменных констант из E_3 .

Сформулируем сначала два простых факта, которыми мы будем часто пользоваться далее.

Факт 1. Пусть $K \in \{M_0, M_1, M_2, U_0, U_1, U_2, C_0, C_1, C_2, B, L\}$. И пусть f – произвольная функция из K . Тогда любая подфункция функции f также принадлежит классу K .

Это следует из того, что указанные классы содержат все константы и являются замкнутыми.

Факт 2 (см. [5]). Пусть $K \in \{M_0, M_1, M_2, U_0, U_1, U_2\}$, f – произвольная функция из P_3 . Тогда из принадлежности к классу K всех одноместных подфункций функции f следует принадлежность к классу K и самой функции f .

Занумеруем предполные классы в P_3 числами от 1 до 18 в том порядке, в котором они перечислены выше. Каждой функции $f(\tilde{x}^n) \in P_3$ поставим в соответствие так называемую строку принадлежности $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{18})$, $\sigma_i \in \{+, -\}$, в которой $\sigma_i = «+»$ тогда и только тогда, когда f принадлежит i -му предполному классу.

В табл. 1 указаны строки принадлежности всех трехзначных функций, имеющих не более одной существенной переменной. Функцию из P_3 мы здесь и далее будем задавать строкой ее значений (предполагая, что наборы значений переменных перечислены в стандартном порядке).

Таблица 1

Таблица принадлежности одноместных функций трехзначной логики предполным классам (см. также [5])

	M_0	M_1	M_2	U_0	U_1	U_2	C_0	C_1	C_2	T_0	T_1	T_2	T_{12}	T_{02}	T_{01}	B	S	L
1	2			3			4			5			6			7	8	9
(000)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+
(001)	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	-
(002)	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	-

1	2		3			4			5			6			7	8	9
(010)	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-
(011)	-	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-
(012)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(020)	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-
(021)	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+
(022)	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	-	-
(100)	-	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
(101)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
(102)	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+
(110)	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-
(111)	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+
(112)	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-
(120)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
(121)	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
(122)	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-
(200)	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-
(201)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
(202)	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
(210)	-	-	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+
(211)	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-
(212)	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	-
(220)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-
(221)	-	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	+	-	-
(222)	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+

Для решения задачи поиска всех попарно различных пересечений предполных классов функций трехзначной логики ключевым является следующий результат.

Теорема. В P_3 справедливы следующие включения:

$$M_1 \cap L \subseteq M_0 \cap M_2, \tag{1}$$

$$M_2 \cap U_1 \cap C_1 \subseteq M_0, \tag{2}$$

$$M_1 \cap M_2 \subseteq U_0, \tag{3}$$

$$C_1 \cap C_2 \subseteq U_0, \tag{4}$$

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 \subseteq M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap L, \tag{5}$$

$$U_1 \cap U_2 \subseteq C_0, \tag{6}$$

$$M_1 \cap M_2 \subseteq C_0, \tag{7}$$

$$M_1 \cap U_1 \subseteq C_0 \cap C_2, \tag{8}$$

$$U_1 \cap T_{01} \cap B \subseteq C_0, \tag{9}$$

$$T_0 \cap B \subseteq C_0, \tag{10}$$

$$T_{12} \cap L \subseteq U_0, \tag{11}$$

$$U_0 \cap L \subseteq C_0 \cap B, \quad (12)$$

$$C_0 \cap L \subseteq U_0, \quad (13)$$

$$T_0 \cap T_1 \cap L \subseteq S, \quad (14)$$

$$M_0 \cap S \subseteq M_1 \cap M_2, \quad (15)$$

$$U_0 \cap S \subseteq U_1 \cap U_2 \cap T_{12}, \quad (16)$$

$$C_0 \cap S \subseteq C_1 \cap C_2, \quad (17)$$

$$T_0 \cap S \subseteq T_1 \cap T_2, \quad (18)$$

$$T_{12} \cap S \subseteq T_{02} \cap T_{01}, \quad (19)$$

$$B \cap S \subseteq L, \quad (20)$$

$$T_{02} \cap T_{01} \subseteq T_0, \quad (21)$$

$$C_1 \cap T_0 \subseteq T_{01}, \quad (22)$$

$$M_1 \cap T_1 \subseteq T_{12} \cap T_{01}, \quad (23)$$

$$M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_0 \cap U_2, \quad (24)$$

$$U_0 \cap T_1 \subseteq T_{12}, \quad (25)$$

$$U_0 \cap U_2 \cap T_{02} \subseteq M_1, \quad (26)$$

$$M_1 \cap T_{02} \cap B \subseteq C_0 \cap C_2. \quad (27)$$

Доказательство.

Докажем (1). Рассмотрим произвольную функцию $f(\tilde{x}^n) \in M_1 \cap L$. Из Факта 1 следует, что у функции $f(\tilde{x}^n)$ все одноместные подфункции $\psi(x)$ тоже принадлежат классу $M_1 \cap L$. Из табл. 1 имеем $\psi(x) \in \{(000), (012), (111), (222)\} \subseteq M_0 \cap M_2$. Тогда в соответствии с фактом 2 получим $f(\tilde{x}^n) \in M_0 \cap M_2$.

Докажем (2). Пусть $f(\tilde{x}^n) \in M_2 \cap U_1 \cap C_1$. Согласно факту 1 для любой одноместной подфункции $\psi(x)$ функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо $\psi(x) \in M_2 \cap U_1 \cap C_1$. Из табл. 1 видно, что $\psi(x) \in \{(000), (010), (012), (111), (212), (222)\} \subseteq M_0$. Тогда, используя факт 2, получим $f(\tilde{x}^n) \in M_0$.

Справедливость вложений (3) и (4) устанавливается аналогично (используются одноместные подфункции).

Для обоснования пункта (5) докажем более сильное утверждение:

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \{0, 1, 2, x\}$$

(с точностью до несущественных переменных).

Очевидно вложение правой части в левую. Фиксируем произвольную функцию $f(\tilde{x}^n) \in U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Согласно факту 1 любая одноместная под-

функция ψ функции f также лежит в $U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Значит, $\psi \in \{(000), (012), (111), (222)\}$. Пусть $f \neq \text{const}$. Тогда у f найдется хотя бы одна существенная переменная. Будем считать, что это x_n . Легко видеть, что существует набор $\tilde{\alpha}^{n-1} \in E_3^{n-1}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, x) = x$.

Рассмотрим любой набор $\tilde{\beta}^{n-1}$, соседний с набором $\tilde{\alpha}^{n-1}$. Пусть эти наборы различаются в позиции i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, т.е. $\alpha_i \neq \beta_i$.

Докажем, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = x$. Предположим, что это не так. Тогда существует такое число $\sigma \in E_3$, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = \sigma$ при всех $x \in E_3$. Обозначим через τ тот единственный элемент, который содержится в множестве $E_3 \setminus \{\alpha_i, \beta_i\}$. Воспользуемся тем, что $f(\tilde{x}^n) \in U_\tau$. Так как $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, \tau) = \tau$ и $f(\tilde{\beta}^{n-1}, \tau) = \sigma$, то $\sigma = \tau$.

С другой стороны, $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, \tau+1) = \tau+1$ и $f(\tilde{\beta}^{n-1}, \tau+1) = \sigma$. Поэтому $\sigma \neq \tau$. Это противоречие.

Поскольку в кубе E_3^{n-1} для любых двух различных наборов существует цепь, их соединяющая, то мы получили, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = x$ при всех $x \in E_3$ и при всех $\tilde{\beta}^{n-1} \in E_3^{n-1}$. Другими словами, $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv x_n$.

Таким образом, вложение (5) установлено.

Докажем теперь (6)–(9). Фиксируем произвольную трехзначную функцию $f(\tilde{x}^n)$ из любого замкнутого класса $K \in \{U_1 \cap U_2, M_1 \cap M_2, M_1 \cap U_1, U_1 \cap T_{01} \cap B\}$. Предположим, что $f(\tilde{x}^n) \notin C_0$. Это означает, что найдутся наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ из E_3^n такие, что $f(\tilde{\alpha}^n) = 1$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 2$, причем для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется хотя бы одно из трех условий: $\alpha_i = \beta_i$, или $\alpha_i = 0$, или $\beta_i = 0$.

Рассмотрим произвольное $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого $\alpha_i \neq \beta_i$. Значит, $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}$.

1) Пусть $K = U_1 \cap U_2$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 2), (2, 0)\}$, заменим α_i на β_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ не изменится. Если же $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, наоборот, заменим β_i на α_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_2$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ также не изменится.

2) Пусть $K = M_1 \cap M_2$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2)\}$, заменим $\alpha_i = 0$ на β_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_2$ и значение 0 является максимальным, а значение 1 – минимальным для порядка $1 < 2 < 0$, то значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ останется равным 1. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(1, 0), (2, 0)\}$, наоборот, заменим $\beta_i = 0$ на α_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_1$, то значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2 по аналогичным причинам.

3) Пусть $K = M_1 \cap U_1$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0,1), (0,2)\}$ заменим $\alpha_i = 0$ на 2. Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ не изменится. В случае $(\alpha_i, \beta_i) = (1,0)$ заменим $\beta_i = 0$ на 1. Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2. Наконец, в случае $(\alpha_i, \beta_i) = (2,0)$ заменим $\alpha_i = 2$ на 0. Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ также не изменится.

4) Пусть $K = U_1 \cap T_{01} \cap B$. Если $\beta_i = 2$, заменим его на 0, а α_i оставим без изменений. Из табл. 1 видно, что в классе $U_1 \cap T_{01} \cap B \cap \bar{C}_0$ нет функций одной переменной. Значит, каждая функция из этого класса принимает только значения 1 и 2. Поскольку $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2.

Проделав эту операцию для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $\alpha_i \neq \beta_i$, получим в итоге два новых набора $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$.

Легко видеть, что в случаях 1 и 2 мы получим $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}'$, но $f(\tilde{\alpha}') = 1 \neq 2 = f(\tilde{\beta}')$. Это противоречие. В случае 3 будет выполняться (относительно обычного порядка $0 < 1 < 2$) следующее: $\tilde{\alpha}' > \tilde{\beta}'$, но $f(\tilde{\alpha}') = 1 < 2 = f(\tilde{\beta}')$. Последнее противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in M_1$. Значит, $M_1 \cap U_1 \subseteq C_0$. В силу двойственности классов имеем также $M_1 \cap U_1 \subseteq C_0 \cap C_2$. В случае 4 набор $\tilde{\beta}'$, очевидно, состоит только из 0 и 1, в то время как $f(\tilde{\beta}') = 2$, что противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in T_{01}$.

Докажем (10) от противного. Пусть найдется функция $f \in \bar{C}_0 \cap T_0 \cap B$. Очевидно, f принимает значения 1 и 2 (так как $f \in \bar{C}_0$) и значение 0 (на наборе $\tilde{0}^n$). Из условия $f \in B$ заключаем, что f имеет не более одной существенной переменной. Но в P_3^1 таких функций нет (см. табл. 1). Это противоречие.

Пусть $f \in T_{12} \cap L$. Предположим, что f имеет две (или больше) существенные переменные. Не умаляя общности, можно считать, что это x_1 и x_2 . Тогда, подставив в функцию f вместо остальных переменных значения 1 и 2, мы получим некую функцию $g(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \in T_{12}$, причем $c_1, c_2 \neq 0$. Теперь нетрудно убедиться, что, если $c_1 = c_2$, то $0 \in \{g(1,1), g(1,2), g(2,2)\}$, а если $c_1 \neq c_2$, то $0 \in \{g(1,1), g(1,2), g(2,1)\}$, что противоречит тому, что $g(x_1, x_2) \in T_{12}$. Итак, $T_{12} \cap L \subseteq P_3^1$, и из табл. 1 вытекает истинность (11).

Пусть $f \in U_0 \cap L$. Если среди переменных функции f найдутся две существенные (например, x_1 и x_2), то, подставляя 0 вместо всех остальных переменных, получим функцию $g(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \in U_0$, причем $c_1, c_2 \neq 0$. Легко видеть, что если $c_1 = c_2$, то $\{g(1,1), g(1,2), g(2,2)\} = E_3$,

а если $c_1 \neq c_2$, то $\{g(1,1), g(1,2), g(2,1)\} = E_3$, это противоречит тому, что $g(x_1, x_2) \in U_0$. Итак, $U_0 \cap L \subseteq P_3^1$, и, анализируя табл. 1, убеждаемся в справедливости (12).

Свойство (13) проверяется с помощью анализа одноместных подфункций.

Докажем (14). Пусть $f \in T_0 \cap T_1 \cap L$. Тогда $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, причем $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$.

Имеем $f(x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1) = c_1(x_1 + 1) + c_2(x_2 + 1) + \dots + c_n(x_n + 1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + 1$, что означает $f \in S$.

Справедливость (15) и (17)–(19) вытекает из двойственности классов.

Для доказательства (16) вспомним, что $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \{0, 1, 2, x\}$ (см. доказательство свойства (5)) и также воспользуемся двойственностью классов U_0, U_1 и U_2 :

$$U_0 \cap S = U_0 \cap U_1 \cap U_2 \cap S = \{0, 1, 2, x\} \cap S = \{x\} \subseteq U_1 \cap U_2 \cap T_{12}.$$

Докажем (20). Пусть $f \in B \cap S$. Функция f самодвойственна, поэтому она принимает все три значения. Учитывая $f \in B$, получим, что f имеет не более одной существенной переменной. Из табл. 1 следует $f \in \{x, x + 1, x + 2\} \subseteq L$.

Фиксируем произвольную функцию $f(\tilde{x}^n)$ из класса $T_{02} \cap T_{01}$. Заметим, что набор $\tilde{0}^n$ лежит как в множестве $\{0, 1\}^n$, так и в множестве $\{0, 2\}^n$. Следовательно, одновременно выполняются условия и $f(\tilde{0}^n) \in \{0, 2\}$. Значит, $f(\tilde{0}^n) = 0$, т.е. $f(\tilde{x}^n) \in T_0$. Свойство (21) доказано.

Для обоснования вложения (22) достаточно доказать, что $C_1 \cap T_0 \cap \bar{T}_{01} = \emptyset$. Предположим, что это не так. Пусть $f(\tilde{x}^n) \in C_1 \cap T_0 \cap \bar{T}_{01}$. Тогда $f(\tilde{0}^n) = 0$ и найдется набор $\tilde{\alpha}^n \in \{0, 1\}^n$ такой, что $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$. Это противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in C_1$.

Докажем (23). Фиксируем произвольную функцию $f \in M_1 \cap T_1$. Имеем $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ и $f \in M_1$. Значит, если $\tilde{\alpha}^n \in \{0, 1\}^n$, то $f(\tilde{\alpha}^n) \leq 1$. Другими словами, $f \in T_{01}$. Аналогично доказывается, что $f \in T_{12}$.

Убедимся в справедливости вложения (24). Для этого докажем, что $M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_0$ (тогда будет справедливо и двойственное включение $M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_2$). Предположим противное. Пусть существует функция $f(\tilde{x}^n) \in M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \cap \bar{U}_0$. Тогда, в соответствии с фактами 1 и 2, у функции f найдется одноместная подфункция $\psi = (001)$ (см. табл. 1). Без ограничения общности можно считать, что при получении подфункции (001) у функции f фиксировались все переменные, кроме последней. Значит, существует набор $\tilde{\alpha}^{n-1}$ ($n > 1$, так как $f \in T_{02}$) такой, что $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, 1) = 0$, $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, 2) = 1$.

Заменим в наборе $\tilde{\alpha}^{n-1}$ все «единицы» на «двойки». Полученный набор обозначим через $\tilde{\beta}^{n-1}$. Из монотонности ($f \in M_1$) имеем $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) \in \{1, 2\}$.

С другой стороны, $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) = 1$ противоречит включению $f \in T_{02}$, а если $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) = 2$, то получим противоречие с условием $f \in C_1$.

Проверим свойство (25). Пусть $f \in U_0 \cap T_1$. Тогда $f(\tilde{1}) = 1$, поэтому из $f \in U_0$ следует, что если $\tilde{\alpha}^n \in \{1, 2\}^n$, то $f(\tilde{\alpha}^n) \in \{1, 2\}$. Другими словами, $f \in T_{12}$.

Свойство (26) докажем от противного. Пусть существует функция $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащая классу $U_0 \cap U_2 \cap T_{02} \cap \overline{M}_1$. В соответствии с фактом 2 найдутся два набора, соседние по i -й координате, $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$, но $f(\tilde{\alpha}^n) > f(\tilde{\beta}^n)$ (все отношения вычисляются относительно обычного порядка $0 < 1 < 2$).

Рассмотрим три случая:

а) $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 0$. Так как $\alpha_i < \beta_i$, то $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Заменяем (α_i, β_i) на $(\alpha_i, \beta_i) = (1, 1)$. Легко видеть, что для новых наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ справедливо $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}'$, но в силу $f \in U_2 \cap U_0$ имеем $f(\tilde{\alpha}') = 2 \neq 0 = f(\tilde{\beta}')$. Это противоречие;

б) $f(\tilde{\alpha}^n) = 1$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 0$. Заменяем в наборах $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ все «единицы» на «двойки». Для новых наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ (соответственно) также справедливо отношение $\tilde{\alpha}' < \tilde{\beta}'$. С другой стороны, из $f \in U_0 \cap T_{02}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}') = 2$, $f(\tilde{\beta}') = 0$, причем наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ также являются соседними по i -й координате. Тем самым мы свели этот случай к случаю (а);

в) $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 1$. Аналогично предыдущему случаю заменим в наборах $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ все «единицы» на «нули». Тогда для полученных наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ имеем $\tilde{\alpha}' < \tilde{\beta}'$. С другой стороны, из $f \in U_2 \cap T_{02}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}') = 2$, $f(\tilde{\beta}') = 0$, причем наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ также являются соседними по i -й координате. Мы вернулись к случаю (а) где противоречие уже получено.

Других вариантов нет. Свойство (26) доказано.

Наконец, убедимся в том, что выполнено вложение (27). Рассмотрим произвольную функцию f из класса $M_1 \cap T_{02} \cap B$. Из табл. 1 видно, что все функции одной переменной, принадлежащие этому классу, принадлежат и классу $C_0 \cap C_2$. Пусть теперь f существенно зависит от двух или более переменных. По определению класса B функция f принимает не более двух значений. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $E(f) = \{0, 1\}$, то из $f \in T_{02}$ имеем $f(\tilde{2}) = 0$, а далее из монотонности получим $f \equiv 0$, что противоречит наличию у f двух существенных переменных. Аналогично, если $E(f) = \{1, 2\}$, то $f(\tilde{0}) = 2$ и $f \equiv 2$, что также противоречит существенности функции f .

Значит, $E(f) = \{0, 2\}$, поэтому $f \in C_0 \cap C_2$.

Доказательство теоремы завершено.

Автор выражает благодарность С. С. Марченкову за постановку задачи поиска всех пересечений предполных классов функций трехзначной логики и А. А. Вороненко за ценные замечания.

Список литературы

1. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
2. **Post, E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions / E. L. Post // Amer. J. Math. – 1921. – V. 43, № 4. – P. 163–185.
3. **Post, E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. – 1941. – V. 5. – 122 p.
4. **Яблонский, С. В.** О функциональной полноте в трехзначном исчислении / С. В. Яблонский // ДАН СССР. – 1954. – № 6. – С. 1153–1156.
5. **Яблонский, С. В.** Функциональные построения в k -значной логике / С. В. Яблонский // Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.
6. **Rosenberg, I. G.** La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini / I. G. Rosenberg // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. B. – 1965. – V. 260. – P. 3817–3819.
7. **Rosenberg, I. G.** Uber die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken / I. G. Rosenberg // Rozprawy Č eskoslovenske Akad. Ved. Rada Math. Prir. V ěd. Praha. – 1970. – Bd. 80. – S. 3–93.

Нагорный Александр Степанович
младший научный сотрудник, кафедра
математической кибернетики,
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

Nagorny Alexander Stepanovich
Research assistant, sub-department
of mathematical cybernetics,
Moscow State University
named after M. V. Lomonosov

E-mail: anagorny@list.ru

УДК 519.7

Нагорный, А. С.

О свойствах предполных классов в P_3 / А. С. Нагорный // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 16–24.

С. П. Халютин, И. Е. Старостин

**ПОТЕНЦИАЛЬНО-ПОТОКОВЫЙ КВАЗИГРАДИЕНТНЫЙ
МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Аннотация. Рассматриваются системы, которые характеризуются неравновесностью протекаемых в них процессов. В таких системах протекают процессы диффузии, теплопереноса, химических, электрохимических, фотохимических и фотоэлектрохимических реакций и др. Предлагается потенциально-потокосый метод математического моделирования неравновесных процессов, основанный на использовании известных или определяемых из эксперимента физико-химических свойств этих процессов.

Ключевые слова: неравновесные процессы, термодинамические силы, потенциально-потокосое уравнение.

Abstract. The article considers systems characterized by non-equilibrium processes occurring in them. Such systems undergo the processes of diffusion, heat, chemical, electrochemical, photochemical and photoelectrochemical reactions, etc. The potential-stream method of mathematical modeling of nonequilibrium processes, based on the use of known or determined from experimental physical and chemical properties of these processes is proposed.

Key words: nonequilibrium processes, thermodynamic forces, the potential-streaming equation.

Постановка задачи

В соответствии с положениями термодинамики протекание процессов диффузии, теплопереноса, химических, электрохимических, фотохимических, фотоэлектрохимических реакций, переноса, поглощения и испускания излучения, переноса электрического заряда вызывается термодинамическими силами [1–4]. Если в системе все термодинамические силы равны нулю, то система находится в состоянии термодинамического равновесия [1–8].

Неравновесные процессы могут протекать как под действием сопряженных [1–4], так и под действием несопряженных сил [1–4]. В системе, где протекает несколько неравновесных процессов, возможно возникновение перекрестных эффектов – протекание процессов под действием несопряженных сил [1–4]. Примерами таких перекрестных эффектов являются: термодиффузия – возникновение диффузионного потока под действием разности температур; сопряженные химические реакции, в которых одна реакция протекает в термодинамически невозможном для нее направлении благодаря протеканию другой реакции [1]. Испускание излучения под действием электрического тока (электролюминесценция), фотохимических реакций (хемилюминесценция) также являются перекрестными эффектами [1–4].

Из неравновесной термодинамики также известно, что термодинамические силы определяются как частные производные функции свободной энергии (энтропии) [1–9]. В соответствии с энергетическим смыслом свободная энергия – это та часть внутренней энергии системы, которая тратится на протекание неравновесных процессов и совершение системой полезной работы над внешними системами [6]. Поэтому работа термодинамических сил равна убыли свободной энергии, расходуемой на протекание неравновесных процессов.

Скорость убыли свободной энергии и характер протекания неравновесных процессов определяется восприимчивостью к термодинамическим силам.

Рассматриваемые системы могут обладать эффектом памяти, причиной этого является протекание соответствующих неравновесных процессов [10, 11]. Например, эффект памяти никель-кадмиевого аккумулятора вызывается химической реакцией никелевой основы кадмиевого электрода с кадмиевым напылением.

В работе рассмотрены следующие вопросы:

- потенциально-поточковый метод моделирования неравновесных процессов;
- замена переменных;
- декомпозиция систем;
- потенциально-поточковый метод для незамкнутых систем
- потенциально-поточковый метод для систем с распределенными параметрами.

Потенциально-поточковый метод моделирования

Рассмотрение неравновесных процессов в технических системах мы начнем с рассмотрения систем с сосредоточенными параметрами. Показано [11–15], что в случае обладания этими системами эффекта памяти можно ввести динамические величины $\vec{h}(t)$, характеризующие накопленный опыт системы, сведя тем самым математическое описание этих систем к математическому описанию систем, не обладающих эффектом памяти. Действительно [11–15], если система обладает памятью, то скорость изменения динамических величин в текущем состоянии системы равна

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{x}(t), t)[\vec{x}(t)]. \quad (1)$$

Введением величины $\vec{h}(t)$ система (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (задаче Коши):

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \\ \frac{d\vec{h}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w}(\vec{x}(t), \vec{h}(t), t) \\ \vec{v}(\vec{x}(t), \vec{h}(t), t) \end{pmatrix}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \vec{h}(t_0) = t_0. \quad (2)$$

Если система автономна, то полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) можно свести к автономной системе ОДУ введением дополнительной величины [16].

Величины $\vec{h}(t)$ имеют физический смысл, так как они являются характеристиками физических и физико-химических процессов, приводящих к эффекту памяти. Например, в случае никель-кадмиевого аккумулятора одной из таких величин является число молей прореагировавшего кадмиевого напыления с никелевой основой [9]. Набор величин $\vec{h}(t)$ включаем в вектор $\vec{x}(t)$, который будет характеризовать состояние системы с учетом накопленного опыта.

Неравновесные процессы могут обладать инерционностью [11], например: нелинейная теплопроводность, нелинейная электропроводность, нели-

нейная диффузия [11]. Поэтому в вектор $\vec{x}(t)$ также добавляем дополнительные величины, учитывающие инерционность.

Величины $\vec{x}(t)$ связаны между собой законами сохранения, в число которых входит первое начало термодинамики. Выделив из них независимые величины, не связанные законами сохранения, мы можем выразить остальные через законы сохранения. Поэтому под $\vec{x}(t)$ мы будем понимать вектор независимых величин, не связанных законами сохранения. Остальные величины (далее $\vec{y}(t)$) выражаем из законов сохранения $\vec{P}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{P}$, где \vec{P} – сохраняющиеся величины, например: внутренняя энергия, импульс, масса, в виде

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, \vec{P}). \quad (3)$$

Законы сохранения $\vec{P}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{P}$ позволяют снизить порядок системы (2) (сведенной к автономной), описывающей неравновесные процессы. Они представляют собой алгебраическую связь между величинами $\vec{x}(t)$ и $\vec{y}(t)$. Далее полагаем, что порядок системы (2) понижен с помощью (3), в систему (2) входят только независимые величины $\vec{x}(t)$ и параметры сохранения \vec{P} . Обозначим через m число независимых величин, не связанных законами сохранения $\vec{P}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{P}$, т.е. число степеней свободы системы.

Протекание неравновесных процессов зависит также и от фиксированных условий протекания неравновесных процессов \vec{U} (например, температуры окружающей среды, влажности и др.), поэтому правая часть системы (2) зависит также от \vec{U} .

Согласно нулевому началу термодинамики любая замкнутая система¹ приходит в состояние равновесия [17]. Поэтому в соответствии с физическим смыслом для замкнутой системы с памятью показатели накопленного опыта вводятся таким образом, что зависимость этих функций от времени асимптотически устойчива [18]. Это обеспечит асимптотическую устойчивость системы (2). Для любой асимптотически устойчивой системы ОДУ (2) существует функция Ляпунова [19], которая согласно своему определению выпуклая в окрестности состояния устойчивого равновесия и монотонно убывающая в силу системы (2) [18], а значит, является по определению функцией свободной энергии (термодинамическим потенциалом) [1–6, 11, 17]. Примерами термодинамических потенциалов являются энтропия в изолированной системе, умноженная на минус единицу, энергия Гельмгольца в изохорно-изотермической системе, энергия Гиббса в изобарно-изотермической системе, потенциал Ω в открытой системе при фиксированных параметрах окружающей среды [17], а в случае сильно неравновесных систем – соответствующие нелинейные величины [10]. Убывание термодинамического потенциала является содержанием второй части второго начала термодинамики [6, 17].

¹ Замкнутой системой [12] будем называть систему, находящуюся при фиксированных внешних условиях (изолированная система, изобарно-изотермическая система, изохорно-изотермическая система, открытая система при фиксированных параметрах окружающей среды) [17].

Функция Ляпунова системы (2) также определяется параметрами сохранения \bar{P} , поэтому она также зависит от параметров \bar{P} , а значит, в силу $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{P}$ функция Ляпунова $\bar{F}(\bar{x}, \bar{P})$ системы (2) является функцией \bar{x} и \bar{y} . Функция Ляпунова $F(\bar{x}, \bar{y})$, имеющая, как было отмечено выше, смысл термодинамического потенциала, монотонно убывает в силу (2) и (3). Далее введенная функция $F(\bar{x}, \bar{y})$ будет называться функцией свободной энергии (термодинамическим потенциалом). Термодинамический потенциал $F(\bar{x}, \bar{y})$ в частных случаях является термодинамическими функциями (потенциалами), описанными в предыдущем абзаце, т.е. является их обобщением. Также термодинамический потенциал зависит и от фиксированных условий протекания неравновесного процесса \bar{U} . Но в замкнутой системе при фиксированных параметрах сохранения и фиксированных условиях протекания неравновесного процесса эти факторы постоянны, и поэтому мы полагаем $F(\bar{x})$.

В состоянии устойчивого равновесия замкнутой системы термодинамический потенциал $F(\bar{x})$ принимает минимальное значение (т.е. термодинамический потенциал $F(\bar{x}, \bar{y})$ при условии законов сохранения $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{P}$ принимает минимальное значение [6, 17]), а значит, $dF(\bar{x}) = 0$. Отсюда термодинамические силы [1–3]

$$\vec{X}(\bar{x}) = -\vec{\nabla}F(\bar{x}), \quad (4)$$

где $\vec{\nabla}$ – оператор Набла $\left(\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^T \right)$, являются причиной и необхо-

димым условием протекания неравновесных процессов, так как условие $dF(\bar{x}) = 0$ эквивалентно условию $\vec{\nabla}F(\bar{x}) = 0$ (дифференцирование свободной энергии производится при фиксированных условиях протекания неравновесных процессов и фиксированных параметрах сохранения). Работа δW термодинамических сил согласно (4)

$$\delta W = \vec{X}^T(\bar{x})d\bar{x} = dF(\bar{x})$$

равняется расходу свободной энергии. Термодинамические силы зависят от \bar{x} , \bar{y} и фиксированных условий протекания неравновесных процессов \bar{U} . Однако в замкнутой системе в силу постоянства параметров \bar{P} и \bar{U} динамические силы полагаем $\vec{X}(\bar{x})$.

Однако, как отмечалось при постановке задачи, одни только термодинамические силы не дают возможности анализировать и моделировать неравновесные процессы – помимо термодинамических сил нужны величины восприимчивостей каждого процесса к термодинамическим силам. В работах [12–15] показано, что коэффициенты матрицы

$$A(\bar{x}) = \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \bar{q}_1(\bar{x}) \dots \bar{q}_{m-1}(\bar{x}) \right) \cdot \left(\vec{X}(\bar{x}) \bar{p}_1(\bar{x}) \dots \bar{p}_{m-1}(\bar{x}) \right)^{-1}, \quad (5)$$

где произвольная система векторов $\{\bar{p}_i(\bar{x})\}_{i=1}^{m-1}$ в состоянии (\bar{x}) выбрана таким образом, что $\det(\bar{X}(\bar{x}) \bar{p}_1(\bar{x}) \dots \bar{p}_{m-1}(\bar{x})) \neq 0$ для любого состояния (\bar{x}) , а система векторов $\{\bar{p}_i(\bar{x})\}_{i=1}^{m-1}$ произвольная, а также эти системы векторов выбираются таким образом, что матрица (5) положительно определена (возможность такого выбора показана в [12–15]), характеризуют восприимчивость неравновесных процессов к термодинамическим силам, а потому их можно ввести как величины восприимчивости. Согласно (5)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(\bar{x})\bar{X}(\bar{x}). \quad (6)$$

Матрица $A(\bar{x})$ в общем случае носит название *матрицы восприимчивостей*.

В силу положительной определенности матрицы $A(\bar{x})$ ее диагональные элементы положительны. Они характеризуют восприимчивость протекаемых процессов (изменений каждой координаты x_i) к сопряженным силам. Перекрестные коэффициенты матрицы $A(\bar{x})$ могут быть как положительными, так и отрицательными – они характеризуют восприимчивость процессов (изменений каждой координаты x_i) к несопряженным им силам. Несопряженные силы могут как способствовать процессу, так ему и препятствовать. С помощью матрицы восприимчивостей удобно анализировать перекрестные явления (например, термодиффузию, сопряженные химические реакции).

Следует также отметить, что системы векторов $\{\bar{p}_i(\bar{x})\}_{i=1}^{m-1}$ и $\{\bar{q}_i(\bar{x})\}_{i=1}^{m-1}$ в (8) выбираются при фиксированных параметрах сохранения \bar{P} и фиксированных условиях протекаемости неравновесного процесса \bar{U} . Но в замкнутой системе параметры \bar{P} и \bar{U} неизменны, поэтому в замкнутой системе для простоты далее матрица восприимчивостей будет записываться как $A(\bar{x})$.

Из положительной определенности матрицы $A(\bar{x})$ следует удовлетворимость системы уравнений второму началу термодинамики. Отсюда полученная математическая модель необратимых процессов отражает физическое содержание моделируемых явлений, обусловленное вторым законом термодинамики (а значит, и не противоречит ему!).

Замена переменных

До сих пор в качестве динамических переменных использовались параметры состояния [6], характеризующие физические состояния системы (например, число молей реагента, число молей вещества в данной области пространства, внутренняя энергия). Однако на практике и при теоретическом анализе удобно пользоваться величинами, не обязательно являющимися параметрами состояния системы (например, число молей прореагировавшего вещества, число молей продиффундировавшего вещества, количество перешедшего тепла), приращения которых связаны с приращениями параметров состояния:

$$\delta\Delta\bar{x} = \left(\frac{\delta\Delta\bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta\Delta\bar{x}}{dx_m} \right) d\bar{x}, \quad (7)$$

где якобиан $\det \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right) \neq 0$ в силу взаимной однозначности приращений $\delta \Delta \bar{x}$.

Матрица (7) $\left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right)$ определяется уравнениями сохранения.

Приращение свободной энергии равно

$$dF\bar{x} = -\bar{X}^T(\bar{x}) \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right)^{-1} \delta \Delta \bar{x};$$

отсюда термодинамические силы, сопряженные этим приращениям $\delta \Delta \bar{x}$, аналогично (4) определяются выражением

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}(\bar{x}) &= - \left(\frac{dF(\bar{x})}{\delta \Delta x_1} \dots \frac{dF(\bar{x})}{\delta \Delta x_m} \right)^T = \\ &= \left(\frac{\delta \Delta(\bar{x})}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right)^{-1T} \bar{X}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\frac{dF(\bar{x})}{\delta \Delta x_1}$ – отношение приращения свободной энергии $dF(\bar{x})$, вызванного приращением координаты $\delta \Delta x_1$ при условии $\delta \Delta x_j = 0, j \neq i, j = \overline{1, m}$, к приращению $\delta \Delta x_i$ этой координаты.

Используя (7) и (8), нетрудно получить уравнение для скоростей $\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dt}$, аналогичное (6). Действительно, в силу (6)–(8) справедливо следующее выражение:

$$\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dt} = \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right) A(\bar{x}) \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right)^T \Delta \bar{X}(\bar{x}); \quad (9)$$

матрица восприимчивостей для системы приращений $\delta \Delta \bar{x}$ равна

$$\tilde{A}(\bar{x}) = \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right) A(\bar{x}) \left(\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_1} \dots \frac{\delta \Delta \bar{x}}{dx_m} \right)^T,$$

отсюда получим уравнения для $\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dt}$:

$$\frac{\delta \Delta \bar{x}}{dt} = \tilde{A}(\bar{x}) \Delta \bar{X}(\bar{x}). \quad (10)$$

Уравнение (10) является более практичным в использовании, чем уравнение (6), так как на практике и при теоретическом анализе пользуются, как отмечалось выше, именно величинами $\delta \Delta \bar{x}$, а не $d\bar{x}$. Замена переменных (7) широко используется в работах [2, 12, 20] при проведении теоретического анализа неравновесных процессов.

Декомпозиция систем

В сложных системах имеют место процессы различной физической природы, перечисленные в постановке задачи. Как правило, при исследовании сложных систем прибегают к декомпозиции [14]. Поэтому необходимо каждую совокупность перекрестных процессов, не перекрестных с другими процессами, не входящую в эту совокупность, рассмотреть отдельно, записав для нее систему (10). Затем, пользуясь уравнениями (10), записанными для каждой совокупности перекрестных процессов, получить систему (6) для всей системы.

Приращение $d\bar{x}$ можно представить следующим образом:

$$d\bar{x} = \sum_{j=1}^N d\bar{x}_j, \quad (11)$$

где $d\bar{x}_j$ – изменение параметра \bar{x} в j -й совокупности перекрестных процессов; N – число совокупностей перекрестных процессов.

Каждый процесс имеет свои законы сохранения. Поэтому законы сохранения накладывают связь на величины $d\bar{x}_j$ [14]. Пусть $\delta\Delta\bar{x}_j$ – вектор независимых величин (размерность вектора $\delta\Delta\bar{x}_j$ m_j , где m_j – число степеней свободы j -й совокупности перекрестных процессов), остальные величины $d\bar{x}_j$ равны

$$d\bar{x}_j = \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right) \delta\Delta\bar{x}_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Система уравнений (12) аналогична системе уравнений (7), ранг матрицы $\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}}$ максимален. Матрица (12), как и матрица (7), определяется уравнениями сохранения j -й совокупности перекрестных процессов. Согласно (11) и (12) можно записать

$$d\bar{x} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right). \quad (13)$$

Приращение свободной энергии согласно (4) и (13) равно

$$dF(\bar{x}) = - \sum_{j=1}^N \bar{X}^T(\bar{x}) \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right) \delta\Delta\bar{x}_j;$$

отсюда термодинамические силы j -й совокупности перекрестных процессов, сопряженные этим приращениям $\delta\Delta\bar{x}_j$, аналогично (4) определяются следующим образом:

$$\Delta\bar{X}_j(\bar{x}) = - \left(\frac{dF(\bar{x})}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{dF(\bar{x})}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T = \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \quad \dots \quad \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T \bar{X}(\bar{x}), \quad j = \overline{1, N}, \quad (14)$$

где $\frac{dF(\bar{x})}{\delta\Delta x_{1j}}$ – отношение приращения свободной энергии, вызванного приращением координаты $\delta\Delta x_{1j}$ при условии $\delta\Delta x_{kj} = 0, k \neq i, k \neq \overline{1, m}$, к приращению $\delta\Delta x_{ij}$ этой координаты. Уравнение (14) аналогично уравнению (8); термодинамические силы $\Delta\bar{X}_j(\bar{x})$ в каждой j -й совокупности перекрестных процессов однозначно определяются силами $\bar{X}(\bar{x})$ системы.

Для каждой j -й совокупности перекрестных процессов в силу отсутствия сопряженности с другими процессами, не входящими в эту совокупность, можно записать

$$\frac{\delta\Delta\bar{x}_j}{d} = A_j(\bar{x})\Delta\bar{X}_j(\bar{x}), j = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Уравнение (15) аналогично уравнению (10). Используя (13)–(15), получим уравнение для скорости $\frac{d\bar{x}}{dt}$:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \dots \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T A_j(\bar{x}) \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \dots \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T \right) \bar{X}(\bar{x});$$

матрица восприимчивостей сложной системы равна

$$A(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \dots \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T A_j(\bar{x}) \left(\frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{1j}} \dots \frac{d\bar{x}_j}{\delta\Delta x_{m_j j}} \right)^T, \quad (16)$$

отсюда получим уравнение (6) сложной системы:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(\bar{x})\bar{X}(\bar{x}).$$

Таким образом, зная из эксперимента матрицы восприимчивостей $A_j(\bar{x})$ (15) простых подсистем, нетрудно с помощью (16) определить матрицу восприимчивостей $A(\bar{x})$ всей системы. Таким образом, рассмотренный принцип декомпозиции дает возможность анализировать сложную систему, зная из эксперимента матрицы восприимчивостей каждой j -й совокупности перекрестных процессов и свободную энергию системы.

Итак, мы ввели величину матрицы восприимчивостей системы и на ее основе создали модель (6), разработали метод замены переменных, дающий возможность работать с удобными для практики и теоретического анализа переменными, а также разработали принцип декомпозиции системы. Такой метод моделирования и анализа системы назван потенциально-потокосым, так как анализ и моделирование системы подразумевают знание термодинамических сил – потенциальных величин [2, 20] и матрицы восприимчивостей системы к этим силам. Матрицы восприимчивостей определяют реакцию си-

стемы на действующие в ней силы – восприимчивость системы к этим силам. Этой реакцией являются скорости протекания неравновесных процессов – потоковые величины [2, 21]. Отсюда и название описанного метода анализа и моделирования неравновесных процессов.

Потенциально-потоковый метод для незамкнутых систем

В незамкнутых системах нарушаются законы сохранения (3), где \vec{P} – сохраняющаяся величина, например, внутренняя энергия, импульс, масса. Поэтому переменные \vec{y} , связанные с величинами \vec{x} законами сохранения (3), также следует рассматривать наравне с \vec{x} . В случае незамкнутой системы скорость протекания необратимых процессов можно разложить на две составляющие: внутреннюю $\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\text{внутр}}$, $\left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\text{внутр}}$ – скорость протекания не-

обратимых процессов в текущем состоянии рассматриваемой системы (при условии, что рассматриваемая система замкнутая), и внешнюю $\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\text{внутр}} = \frac{d\vec{x}}{dt} - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\text{внутр}}$, $\left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\text{внутр}} = \frac{d\vec{y}}{dt} - \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\text{внутр}}$ – составляющая,

обусловленная взаимодействием с внешними системами. Внешняя составляющая определяется как текущим состоянием системы, так и взаимодействием с внешними системами. Учитывая, что законы сохранения нарушаются, а также что внешние условия также могут меняться, а потому матрица восприимчивостей в модели незамкнутых систем уже не $A(\vec{x})$, а $A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})$, аналогично свободная энергия и термодинамические силы уже не $F(\vec{x})$ и $\vec{X}(\vec{x})$ а $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})$ и $\vec{X}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})$, получим модель незамкнутой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})\vec{X}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U}) + \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\text{внеш}}; \\ \frac{d\vec{y}}{dt} &= \left(\frac{\partial \vec{y}(\vec{x}, \vec{P})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \vec{y}(\vec{x}, \vec{P})}{\partial x_m}\right) A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})\vec{X}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U}) + \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\text{внеш}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Термодинамические силы также определяем в соответствии с (4) – подставляем в $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{U})$ вместо \vec{y} функцию $\vec{y}(\vec{x}, \vec{P})$ и дифференцируем $F(\vec{x}, \vec{y}(\vec{x}, \vec{P}), \vec{U})$, полагая параметры \vec{P} и \vec{U} фиксированными.

Уравнения (17) являются потенциально-потоковой моделью незамкнутой неравновесной системы, они обобщают потенциально модель (6) на случай незамкнутой системы.

Потенциально-потоковый метод для систем с распределенными параметрами

В случае систем с распределенными параметрами берем элемент среды (в случае химических реакций) или соседние взаимодействующие между собой элементы среды и для параметров этих элементов среды повторяем описанные выше рассуждения, записываем для них систему (4). Затем переходим к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Список литературы

1. **Агеев, Е. П.** Неравновесная термодинамика в вопросах и ответах / Е. П. Агеев. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 136 с.
2. **Грот, С. Р.** Термодинамика необратимых процессов / С. Р. Грот. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 281 с.
3. **Пригожин, И.** Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кондепуди ; пер. с англ. Ю. А. Данилова и В. В. Белого. – М. : Мир, 2002. – 461 с.
4. **Пригожин, И.** Введение в термодинамику необратимых процессов / И. Пригожин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 160 с.
5. **Пригожин, И.** Химическая термодинамика / И. Пригожин, Р. Дефэй. – Новосибирск : Наука, Сибирское отд., 1966. – 512 с.
6. **Крутов, В. И.** Техническая термодинамика / В. И. Крутов, С. И. Исаев, И. А. Кожинов / под ред. В. И. Крутова. – М. : Высш. шк., 1991. – 384 с.
7. **Гуров, А. А.** Химия / А. А. Гуров, Ф. З. Бадаев, Л. П. Овчаренко, В. Н. Шаповал. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 478 с.
8. **Плесков, Ю. В.** Фотоэлектрохимическое преобразование солнечной энергии / Ю. В. Плесков. – М. : Химия, 1990. – 176 с.
9. **Таганова, А. А.** Герметичные химические источники тока: Элементы и аккумуляторы. Оборудование для испытаний и эксплуатации : справочник / А. А. Таганова, Ю. И. Бубнов, С. Б. Орлов. – СПб. : Химиздат, 2005. – 264 с.
10. **Стратонович, Р. Л.** Нелинейная неравновесная термодинамика / Р. Л. Стратонович. – М. : Наука, 1985. – 480 с.
11. **Жоу, Д.** Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – М. : Изд-во Инст. компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
12. **Халютин, С. П.** Моделирование сложных электроэнергетических систем летательных аппаратов / С. П. Халютин, М. Л. Тюляев, Б. В. Жмуров, И. Е. Старостин. – М. : Издание ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», 2010. – 188 с.
13. **Старостин, И. Е.** Моделирование неравновесных систем / И. Е. Старостин ; под ред. В. В. Слабко. – Красноярск : Изд-во СФУ, 2010. – С. 187–192.
14. **Старостин, И. Е.** Материалы международной НПК «Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий ИНФО-2010» / И. Е. Старостин ; под ред. С. У. Увайсова. – М. : МИЭМ, 2010. – С. 268–271.
15. **Халютин С. П.** XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова / С. П. Халютин, И. Е. Старостин // Потенциально-потокное математическое моделирование необратимых процессов в электроэнергетике : сб. докладов [Электронный ресурс]. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2010. – С. 398–403.
16. **Агафонов, С. А.** Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Г. В. Муратова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 347 с.
17. **Квасников, И. А.** Термодинамика и статистическая физика. Т. 3. Теория неравновесных систем / И. А. Квасников. – М. : Эдиториал УРСС, 2010. – 432 с.
18. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
19. **Красовский, И. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости / И. Н. Красовский. – М. : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. – 211 с.
20. **Бахарева, И. Ф.** Нелинейная неравновесная термодинамика / И. Ф. Бахарева. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1976. – 150 с.
21. **Зарубин, В. С.** Математическое моделирование в технике / В. С. Зарубин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496 с.

Халютин Сергей Петрович

доктор технических наук,
профессор, начальник кафедры
электрооборудования (и метрологии),
Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского
и Ю. А. Гагарина (г. Москва)

E-mail: skhalutin@naukasoft.ru

Khalyutin Sergey Petrovich

Doctor of engineering sciences, professor,
head of sub-department of electrical
equipment and metrology, Air force
academy named after N. E. Zhukovsky
and Y. A. Gagarin (Moscow)

Старостин Игорь Евгеньевич

научный сотрудник, Военно-воздушная
академия имени профессора
Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина
(г. Москва)

E-mail: skhalutin@naukasoft.ru

Starostin Igor Evgenyevich

Researcher, Air force academy
named after N. E. Zhukovsky
and Y. A. Gagarin (Moscow)

УДК 536-12

Халютин, С. П.

Потенциально-поточковый квазиградиентный метод моделирования неравновесных процессов / С. П. Халютин, И. Е. Старостин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 25–35.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Указаны достаточные условия эквиограниченности и квазиэквиограниченности в пределе решений сингулярно возмущенных систем. При этом используется связь между решениями возмущенной и вырожденной систем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, дифференциальные уравнения, вырожденная система, ограниченность решений, устойчивость.

Abstract. The article describes sufficient conditions for boundedness of solutions of singularly perturbed systems. The authors use the relationship between the solutions of the perturbed and singular systems.

Key words: singularly perturbed system, differential equations, degenerate system, boundedness of the solutions, stability.

Введение

В статье [1] указаны достаточные условия равномерной ограниченности решений квазилинейных сингулярно возмущенных систем. В настоящей работе проводится исследование решений сингулярно возмущенных систем общего вида на эквиограниченность и квазиэквиограниченность в пределе.

Прежде чем переходить к изложению основного содержания работы, приведем определения указанных типов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений.

Определение [2]. Решения системы

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x \in R^n, \quad t \in R,$$

называются

– эквиограниченными, если для любых $\alpha > 0$ и t^0 можно найти число $\beta = \beta(\alpha, t^0) > 0$ такое, что из условия $\|x^0\| < \alpha$ следует $\|x(t, t^0, x^0)\| < \beta$ при $t > t^0$;

– квазиэквиограниченными в пределе, если для любых $\alpha > 0$ и t^0 можно найти числа $B > 0$ и $T = T(\alpha, t^0) > 0$ такие, что $\|x(t, t^0, x^0)\| < B$ при $\|x^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \\ \mu \frac{dz}{dt} = h(t, y, z), \end{cases} \quad (1)$$

в которой $y = (y_1, \dots, y_k)^T$, $z = (z_1, \dots, z_m)^T$, $\mu > 0$.

Предполагается, что правая часть системы (1) допускает существование и единственность решения задачи Коши для любых начальных условий $y(t^0, \mu) = y^0$, $z(t^0, \mu) = z^0$. Это решение обозначим через $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$.

Рассмотрим вырожденную систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \\ 0 = h(t, y, z). \end{cases}$$

Предположим, что уравнение $h(t, y, z) = 0$ имеет один корень $z = \psi(t, y)$. Причем функция $\psi(t, y)$ ограничена. Тогда вырожденная система переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \psi(t, y)), \\ z = \psi(t, y). \end{cases} \quad (2)$$

Начальные данные для дифференциальной подсистемы системы (2) остаются теми же, т.е. $y(t^0) = y^0$. Решение системы (2) будем обозначать как $y(t)$, $z(t)$. Функция $z(t)$ в начальный момент t^0 может принимать значения, отличные от z^0 .

В работе А. Н. Тихонова [3] исследовалась связь между решениями систем (1) и (2). При этом были получены достаточные условия, при которых $\{y(t, \mu), z(t, \mu)\}$ неограниченно приближается к $\{y(t), z(t)\}$ при стремлении возмущающего параметра μ к нулю. В настоящей статье такая связь используется для установления достаточных условий, при выполнении которых решения возмущенной системы (1) наследуют ограниченность от решений системы (2) при $\mu > 0$.

Пусть корень $z = \psi(t, y)$ устойчив, по терминологии А. Н. Тихонова [3]. Для детального разъяснения этой ситуации рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\frac{dz}{d\tau} = h(t^0, y^0, z), \quad z(0) = z^0. \quad (3)$$

Точка $z_0 = \psi(t^0, y^0)$, очевидно, является положением равновесия системы (3). Корень $z = \psi(t, y)$ называется устойчивым в некоторой области D пространства (t, y) , если найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом выборе $(t^0, y^0) \in D$ и $z^0 : \|z^0 - \psi(t^0, y^0)\| < \varepsilon$ решение начальной задачи (3) $z(\tau)$ стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ к положению равновесия $z_0 = \psi(t^0, y^0)$. Совокупность всех таких точек (t^0, y^0, z^0) , для которых решение задачи (3) стремится

ся к $z_0 = \psi(t^0, y^0)$, называется областью влияния корня $z = \psi(t, y)$. Здесь и далее будем предполагать, что область устойчивости D бесконечна по измерению t .

Теорема 1. Если начальная точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния устойчивого корня $z = \psi(t, y)$, а решение вырожденной системы (2) с начальными данными $y(t^0) = y^0$ ограничено, то решение исходной системы (1), определенное начальными данными $y(t^0, \mu) = y^0, z(t^0, \mu) = z^0$, также ограничено при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Доказательство. Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния устойчивого корня $z = \psi(t, y)$, то согласно теореме А. Н. Тихонова [3] имеет место равномерный в области $t \geq t_1 > t^0$ предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} y(t, \mu) = y(t), \quad \lim_{\mu \rightarrow +0} z(t, \mu) = z(t). \quad (4)$$

Это означает, что для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $\mu < \delta$ для всех $t \geq t_1$ выполняются неравенства:

$$\|y(t, \mu) - y(t)\| < \varepsilon, \quad \|z(t, \mu) - z(t)\| < \varepsilon. \quad (5)$$

По условию теоремы $\|y(t)\| \leq a$ и $\|z(t)\| \leq b$. Тогда из неравенств (5) следует

$$\|y(t, \mu)\| < a + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < b + \varepsilon. \quad (6)$$

Теорема доказана.

Упомянутые в доказательстве величины $\delta > 0$ и t_1 на самом деле зависят от начальных данных (t^0, y^0, z^0) , т.е. представляют собой функции $\delta = \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0)$ и $t_1 = t_1(t^0, y^0, z^0)$. Нижняя грань функции $\delta = \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0)$ на всем пространстве R^{1+k+m} при фиксированном ε может быть равна нулю. Однако на компакте

$$E_\alpha = \left\{ (y^0, z^0) : \|y^0\|^2 + \|z^0\|^2 \leq \alpha^2 \right\}$$

при фиксированных значениях ε и t^0 нижняя грань отлична от нуля

$$\inf_{E_\alpha} \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) = \mu_0 > 0.$$

Функция $t_1(t^0, y^0, z^0)$ при фиксированном t^0 может быть неограниченной, но на компакте E_α ее значения ограничены:

$$\sup_{E_\alpha} t_1(t^0, y^0, z^0) = t^1 < +\infty.$$

Теорема 1 утверждает, что при выполнении определенных условий решения исходной системы (1) наследуют свойство ограниченности от решений вырожденной системы (2). Чтобы иметь возможность оценивать решения системы (1) с произвольными начальными данными (t^0, y^0, z^0) , достаточно потребовать, чтобы область устойчивости D совпадала со всем пространством (t, y) , а положение равновесия $z_0 = \psi(t^0, y^0)$ системы (3) было асимптотически устойчивым в целом. Последнее означает, что решение задачи (3) $z(\tau)$ стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ к точке $z_0 = \psi(t^0, y^0)$ при любых начальных данных $z(0) = z^0$. В рамках этих требований получим следующее утверждение.

Теорема 2. При всех достаточно малых $\mu > 0$ справедливы утверждения:

- 1) если решения системы (2) эквиограничены, то решения системы (1) эквиограничены;
- 2) если решения системы (2) квазиэквиограничены в пределе, то решения системы (1) квазиэквиограничены в пределе.

Доказательство. Зафиксируем начальный момент t^0 .

1. Эквиограниченность решений системы (2) означает, что для любого $\alpha > 0$ найдется число $\beta = \beta(\alpha, t^0) > 0$ такое, что из $\|y^0\| < \alpha$ следует

$$\|y(t)\| < \beta, \quad \|z(t)\| < \beta.$$

Тогда в неравенствах (6) $a = b = \beta$, следовательно

$$\|y(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad (7)$$

причем эти неравенства выполняются при всех $\mu < \mu_0$ и $t \geq t^1 > t^0$.

2. Зафиксируем произвольное $\alpha > 0$. Квазиэквиограниченность в пределе означает, что существуют числа $B > 0$ и $T = T(\alpha, t^0) > 0$ такие, что

$$\|y(t)\| < B, \quad \|z(t)\| < B$$

при $\|y^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$.

Неравенства (6) при $(y^0, z^0) \in E_\alpha$ и $t > t^2 > t^0$ примут вид

$$\|y(t, \mu)\| < B + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < B + \varepsilon. \quad (8)$$

При этом $t^2 = \max\{t^1, t^0 + T\}$.

Теорема доказана.

2. Теперь рассмотрим случай, когда уравнение $h(t, y, z) = 0$ имеет n корней $z_i = \psi_i(t, y)$ ($i = \overline{1, n}$) и все они ограничены. Каждому корню $z_i = \psi_i(t, y)$ будет соответствовать своя вырожденная система:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \psi_i(t, y)), \\ z = \psi_i(t, y). \end{cases} \quad (9)$$

Система (3) будет иметь n положений равновесия, каждое из которых имеет свою область влияния. Для сохранения связи между решениями возмущенной системы (1) и вырожденной системы (2) достаточно потребовать, чтобы, во-первых, каждый из корней $z_i = \psi_i(t, y)$ ($i = \overline{1, n}$) был устойчив и область его устойчивости D_i совпадала со всем пространством (t, y) . Во-вторых, потребуем, чтобы объединение областей влияния положений равновесия системы (3) совпадало со всем пространством R^m . Второе требование означает, что начальное значение z^0 в задаче (3) так или иначе попадет в область влияния одного из положений равновесия и решение $z(\tau)$, выходящее из z^0 , будет к нему стремиться при $\tau \rightarrow +\infty$. Если эти требования выполнены, то получим следующее утверждение.

Теорема 3. При всех достаточно малых $\mu > 0$ справедливы утверждения:

- 1) если решения систем (9) ограничены, то решения системы (1) ограничены;
- 2) если решения систем (9) эквиограничены, то решения системы (1) эквиограничены;
- 3) если решения систем (9) квазиэквиограничены в пределе, то решения системы (1) квазиэквиограничены в пределе.

Доказательство.

1. Рассмотрим решение системы (1), выходящее из точки (t^0, y^0, z^0) , и зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$. В силу поставленных выше требований начальная точка попадет в область влияния какого-либо корня $z_j = \psi_j(t, y)$. Тогда найдутся $\delta_j = \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0$ и $t_{1,j} = t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) > t^0$ такие, что при $\mu < \delta_j$ и $t \geq t_{1,j}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y(t, \mu)\| &< \|y_j(t)\| + \varepsilon, \\ \|z(t, \mu)\| &< \|z_j(t)\| + \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

где $y_j(t)$ и $z_j(t)$ – решения вырожденной системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \Psi_j(t, y)), \\ z = \Psi_j(t, y), \end{cases} \quad (11)$$

с начальными данными $y(t^0) = y^0$.

По условию теоремы решения системы (11) ограничены, т.е. $\|y_j(t)\| \leq a$, $\|z_j(t)\| \leq b$. Тогда решение системы (1), выходящее из точки (t^0, y^0, z^0) , также ограничено при $\mu < \delta_j$:

$$\|y(t, \mu)\| < a + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < b + \varepsilon. \quad (12)$$

2. Зафиксируем t^0 и $\varepsilon > 0$. Второе условие теоремы означает, что для любого $\alpha > 0$ найдутся $\beta_i = \beta_i(\alpha) > 0$ ($i = \overline{1, n}$) такие, что из условия $\|y^0\| < \alpha$ следует

$$\|y_i(t)\| < \beta_i, \quad \|z_i(t)\| < \beta_i, \quad (13)$$

где $y_i(t)$, $z_i(t)$ – решения системы (9). Обозначим $\beta = \max_i \{\beta_i\}$.

Рассмотрим решения системы (1), выходящие из точки (t^0, y^0, z^0) . Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния корня $z_j = \Psi_j(t, y)$, то согласно предыдущему пункту доказательства справедливы неравенства (10). Обозначим $\delta_j^0 = \inf_{E_\alpha} \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0$ и $t_j^1 = \sup_{E_\alpha} t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) < +\infty$. Тогда для всех решений системы (1) с начальными данными $(y^0, z^0) \in E_\alpha$, попадающими в область влияния корня $z_j = \Psi_j(t, y)$, при $\mu < \delta_j^0$ и $t \geq t_j^1$ выполняются неравенства (10). Обозначим теперь $\mu_0 = \min_j \{\delta_j^0\}$, $t^1 = \max_j \{t_j^1\}$. Тогда в силу соотношений (13) для всех решений системы (1) с начальными данными $(y^0, z^0) \in E_\alpha$ справедливы неравенства

$$\|y(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon \quad (14)$$

при $t \geq t^1$ и $\mu < \mu_0$.

3. Зафиксируем t^0 , $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$. По третьему условию теоремы существуют числа $B, T > 0$ такие, что при $\|y^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$ выполняются неравенства

$$\|y(t)\| < B, \quad \|z(t)\| < B. \quad (15)$$

Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния корня $z_j = \psi_j(t, y)$, то справедливы неравенства (10). Пусть

$$\mu_0 = \min_j \sup_{E_\alpha} \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0,$$

$$t^1 = \max_j \inf_{E_\alpha} t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) < +\infty, \quad t^2 = \max\{t^0 + T, t^1\},$$

тогда с учетом (15) можно записать

$$\|y(t, \mu)\| < B + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < B + \varepsilon$$

при всех $t > t^2$ и $\mu < \mu_0$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Козлов, М. В.** Равномерная ограниченность сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений / М. В. Козлов, В. Н. Щенников // Вестник Мордовского университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010. – № 4. – С. 56–59.
2. **Йосидзава, Т.** Функция Ляпунова и ограниченность решений / Т. Йосидзава // Математика : сб. переводов. – М. : Мир, 1955. – С. 95–127.
3. **Тихонов, А. Н.** О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1950. – Т. 27 (69), № 1. – С. 147–156.

Козлов Михаил Владимирович

магистрант, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Kozlov Mikhail Vladimirovich

graduate student, Mordovia State University
named after N. P. Ogaryov (Saransk)

Щенников Владимир Николаевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений,
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Shchennikov Vladimir Nikolayevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of differential equations, Mordovia
State University named after N. P. Ogaryov
(Saransk).

УДК 517.928.4

Козлов, М. В.

Ограниченность решений систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений / М. В. Козлов, В. Н. Щенников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 36–42.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЛОСКОМ ДВУХСЛОЙНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ¹

Аннотация. Рассматривается распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейном плоском двухслойном диэлектрическом волноводе. Диэлектрическая проницаемость в слоях описывается законом Керра. Слои расположены между двумя изотропными немагнитными полубесконечными средами с постоянными электродинамическими параметрами. Получено дисперсионное уравнение для собственных значений задачи (постоянных распространения).

Ключевые слова: задача сопряжения для обыкновенных дифференциальных уравнений в многосвязной области, нелинейность Керра, дисперсионное уравнение.

Abstract. The article considers electromagnetic TE-wave propagation in a two-layered dielectric waveguide. Permittivities inside the layers are described by Kerr law. The layers are located between two semi-infinite spaces with constant permittivities. The author derives a dispersion equation for eigenvalues (propagation constants) of the problem.

Key words: conjugation problem for ordinary differential equations in multiply-connected domain, Kerr nonlinearity, dispersion equation.

Введение

Данная работа продолжает исследования [1–4]. Здесь рассматривается задача о распространении ТЕ-волн в плоском двухслойном диэлектрическом волноводе. Волновод помещен между двумя полубесконечными средами с постоянными электродинамическими параметрами. Диэлектрическая проницаемость в каждом из двух слоев зависит от электрического поля по закону Керра: $\varepsilon = \varepsilon_{\text{const}} + \alpha|\mathbf{E}|^2$, где $\varepsilon_{\text{const}}$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости, α – коэффициент нелинейности. Задача сводится к отысканию постоянных распространения электромагнитной волны в рассматриваемой волноведущей структуре. Постоянные распространения являются корнями дисперсионного уравнения, которое представляется основным результатом рассматриваемой работы. Для вывода дисперсионного уравнения используется теория эллиптических функций. Рассматриваемый в этой работе подход позволяет изучать нелинейность вида $\varepsilon = \varepsilon_{\text{const}} + \alpha|\mathbf{E}|^2 + \beta|\mathbf{E}|^4$, где $\varepsilon_{\text{const}}$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости; α , β – коэффициенты нелинейности. Работа [5] (где также используется подход на основе эллиптических функций) тесно связана с рассматриваемой в этой статье задачей. Полученное дисперсионное уравнение позволяет изучать как обычные нелинейные материалы, так и нелинейные метаматериалы. Важ-

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-2074.2011.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-07-00330-А).

ность найденного дисперсионного уравнения определяется, по крайней мере, двумя обстоятельствами: 1) полученное дисперсионное уравнение является точным (получено без упрощающих предположений в рамках модели керровской нелинейности) и может быть выписано для большего числа слоев. Такая многослойная структура может рассматриваться как одномерный фотонный кристалл [6]. Фотонные кристаллы в настоящее время привлекают большое внимание исследователей (см., например, [6, 7]); 2) полученное дисперсионное уравнение может быть использовано для построения и тестирования численных методов решения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через два однородных, изотропных, немагнитных диэлектрических слоя. Диэлектрическая проницаемость в слоях зависит от электрического поля по закону Керра. Слои расположены между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$ и $h = h_1 + h_2$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_4 соответственно (ϵ_1 и ϵ_4 – произвольные действительные постоянные). Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Предполагаем гармоническую зависимость полей от времени в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t;$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – круговая частота; \mathbf{E}_+ , \mathbf{E}_- , \mathbf{H}_+ , \mathbf{H}_- – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей \mathbf{E} , \mathbf{H} [8]: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-$. Везде ниже множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ будем опускать.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h_1$, $x = h_1 + h_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид $\epsilon = \epsilon_i + \alpha_i |\mathbf{E}|^2$, где $i = 2, 3$ и ϵ_i , α_i – произвольные постоянные. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

На рис. 1 показана геометрия задачи.

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T$,

где $(\dots)^T$ – операция транспонирования. Легко показать, что компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} не зависят от переменной y . Волны, распространяющиеся вдоль границы раздела сред z , гармонически зависят от z . Тогда компоненты полей \mathbf{E} , \mathbf{H} имеют следующий вид:

$$H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}. \quad (2)$$

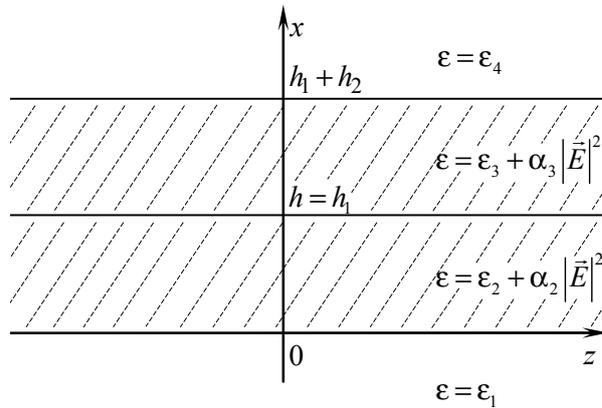


Рис. 1

Подставив компоненты (2) в уравнения Максвелла (1), выполнив нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\epsilon_0}$ ($i = 1, 2$), где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума и $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0$ с $\mu = \mu_0$, обозначив $E_y(\tilde{x}) \equiv Y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем уравнение

$$Y''(x) = \gamma^2 Y(x) - \epsilon Y(x), \quad (3)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения)

Будем искать действительные решения $Y(x)$ для уравнения (3). Полагая γ действительным (так что $|E|^2$ не зависит от z) и считаем

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_2 + \alpha_2 Y^2, & 0 < x < h_1; \\ \epsilon_3 + \alpha_3 Y^2, & h_1 < x < h_1 + h_2; \\ \epsilon_4, & x > h_1 + h_2. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть функция Y дифференцируема в слое так, что

$$Y(x) \in C(-\infty; +\infty) \cap C^1(-\infty; \infty) \cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h_1) \cap C^2(h_1; h) \cap C^2(h; +\infty). \quad (5)$$

2. Решение системы дифференциальных уравнений

Для $x < 0$, $\epsilon = \epsilon_1$ из (3) и (4) в силу условия на бесконечности получаем решение

$$Y(x) = A \exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right). \quad (6)$$

Для $x > h$, $\varepsilon = \varepsilon_4$ из (3) и (4) в силу условия на бесконечности получаем решение

$$Y(x) = B \exp\left(-(x - h_1 + h_2)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_4}\right). \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) постоянные A и B определяются начальными условиями и условиями сопряжения.

Внутри слоя $0 < x < h_1$ уравнение (3) принимает вид

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha_2 Y^2(x))Y(x). \quad (8)$$

Это уравнение интегрируется в эллиптических функциях (см. [9]¹). Из (8) получаем

$$(Y')^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_2)Y^2 - \frac{\alpha_2}{2}Y^4 + C_2, \quad Y^2(x) = \frac{2}{3\alpha_2}(\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(x + C_{22})), \quad (9)$$

где $\wp(x)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, ее инварианты имеют вид

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(3\alpha_2 C_2 + 2(\gamma^2 - \varepsilon_2)^2\right) \quad \text{и} \quad g_3 = -\frac{2}{3}\alpha_2(\gamma^2 - \varepsilon_2)C_2 - \frac{8}{27}(\gamma^2 - \varepsilon_2)^3;$$

C_2 и C_{22} – постоянные интегрирования.

Внутри слоя $h_1 < x < h_1 + h_2$ получаем по аналогии с предыдущим

$$(Y')^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3)Y^2 - \frac{\alpha_3}{2}Y^4 + C_3 \quad \text{и} \quad Y^2(x) = \frac{2}{3\alpha_3}(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(x + C_{33})), \quad (10)$$

где

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(3\alpha_3 C_3 + 2(\gamma^2 - \varepsilon_3)^2\right) \quad \text{и} \quad g_3 = -\frac{2}{3}\alpha_3(\gamma^2 - \varepsilon_3)C_3 - \frac{8}{27}(\gamma^2 - \varepsilon_3)^3;$$

C_3 и C_{33} – постоянные интегрирования.

3. Граничные условия и дисперсионное уравнение

Как известно, касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границах раздела сред. В нашем случае касательными компонентами являются E_y и H_z . Учитывая сказанное, получаем для функций Y и Y' следующие условия сопряжения:

$$[Y]_{x=0} = 0, \quad [Y]_{x=h_1} = 0, \quad [Y]_{x=h_1+h_2} = 0,$$

¹ Все результаты теории эллиптических функций, используемые здесь, можно найти в [9].

$$[Y']_{x=0} = 0, [Y']_{x=h_1} = 0, [Y']_{x=h_1+h_2} = 0, \quad (11)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Пусть $Y_0 := Y(0)$, $Y_h := Y(h)$ и постоянная Y_h считается известной, тогда $B = Y_h$, $A = Y_0$. Далее, используя (6), (7), получаем

$$Y'(h) = -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_4} Y_h, Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0. \quad (12)$$

Будем последовательно использовать условия сопряжения (11) на каждой границе раздела. Получаем:

$$Y_0^2 = \frac{2}{3\alpha_2} (\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(C_{22})), \quad (13a)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} (\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(h_1 + C_{22})) = \frac{1}{\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + C_{33})), \quad (13б)$$

$$Y_h^2 = \frac{2}{3\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + h_2 + C_{33})), \quad (13в)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_1) Y_0^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_2) Y_0^2 - \frac{\alpha_2}{2} Y_0^4 + C_2, \quad (13г)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_2) Y_{h_1}^2 - \frac{\alpha_2}{2} Y_{h_1}^4 + C_2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3) Y_{h_1}^2 - \frac{\alpha_3}{2} Y_{h_1}^4 + C_3, \quad (13д)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_4) Y_h^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3) Y_h^2 - \frac{\alpha_3}{2} Y_h^4 + C_3. \quad (13е)$$

Величину Y_{h_1} можно выразить из уравнения (9) (или (10)), получаем

$$Y_{h_1}^2 = \frac{2}{3\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + C_{33})).$$

Система (13) состоит из шести уравнений и пяти неизвестных Y_0 , C_2 , C_{22} , C_3 , C_{33} (мы учитываем, что Y_{h_1} выражается через C_{33}). Пять уравнений этой системы позволят найти пять неизвестных, а шестое даст дисперсионное уравнение. Найдем его. Из уравнений (13г) и (13е) найдем

$$C_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) Y_0^2 + \frac{\alpha_2}{2} Y_0^4, \quad (14a)$$

$$C_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) Y_h^2 + \frac{\alpha_3}{2} Y_h^4. \quad (14б)$$

Учитывая четность функции Вейерштрасса, из уравнений (13a) и (13в) найдем

$$C_{22} = \pm \wp_2^{-1}(\sigma_2) + T_2 n_2 + T_2' m_2, \quad (14в)$$

$$C_{33} = \pm \wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_1 - h_2 + T_3 n_3 + T_3' m_3, \quad (14г)$$

где $\sigma_2 = \frac{2(\gamma^2 - \varepsilon_2) - 3\alpha_2 Y_0^2}{6}$, $\sigma_3 = \frac{2(\gamma^2 - \varepsilon_3) - 3\alpha_3 Y_h^2}{6}$; T_2' , T_2'' – независимые периоды функции \wp_2 ; T_3' , T_3'' – независимые периоды функции \wp_3 (причем T_2, T_3 выбраны действительными, а T_2', T_3' – чисто мнимыми); $n_2, n_3, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$; знак \wp^{-1} означает функцию, обратную к \wp (т.е. эллиптический интеграл в нормальной форме Вейерштрасса).

Уравнения (13б) и (13д) примут вид

$$\alpha_3 \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2 \left(\wp_2^{-1}(\sigma_2) + h_1 \right) \right) = \alpha_2 \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right), \quad (14д)$$

$$\alpha_2 Y_0^4 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) Y_0^2 + f = 0, \quad (14е)$$

где

$$f = \frac{4}{3\alpha_3} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right) + \\ + \frac{4}{9\alpha_3^2} (\alpha_3 - \alpha_2) \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right)^2 - 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) Y_h^2 - \alpha_3 Y_h^4.$$

Уравнение (14е) является квадратным относительно Y_0^2 . Подставляя в (14д) значение Y_0^2 (найденное из (14е)), получаем дисперсионное уравнение.

Число T определяется в зависимости от знака дискриминанта $\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2$ кривой $f = 4t^3 - g_2t - g_3$. Если $\Delta > 0$, то уравнение $f = 0$

имеет три действительных корня $e_1 > e_2 > e_3$, и $T = 2 \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$ (в этом

случае T – действительный период функции $\wp(x)$). Если $\Delta < 0$, уравнение

$f = 0$ имеет один действительный корень e_2 , и $T = 2 \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$

(в этом случае полупериоды ω_1 и ω_2 функции $\wp(x)$ являются комплексно-сопряженными числами и их сумма есть действительное число T). Число T' определяется как линейная комбинация периодов функции $\wp(x)$ так, чтобы число T' оказалось чисто мнимым.

Заключение

При изучении распространения поляризованных электромагнитных волн в слоях с диэлектрической проницаемостью, полиномиально зависящей от напряженности электрического поля, эллиптические функции удается применить только в случае ТЕ-волн и нелинейности полиномиального типа

не сложнее обобщенной керровской. Для изучения распространения поляризованных электромагнитных волн в нелинейных слоях с произвольными нелинейностями можно использовать подход на основе интегральных дисперсионных соотношений [1].

Автор благодарит Ю. Г. Смирнова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2010. – 264 с.
2. **Валовик, Д. В.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 309–314.
3. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 587–599.
4. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
5. **Schurmann, H. W.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure / H. W. Schurmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 197.
6. **Joannopoulos, J. D.** Photonic Crystals. Molding the Flow of Light / J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade. – Second Edition. – Princeton University Press, 2008. – P. 286.
7. **Lourtioz, J.-M.** Photonic Crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices / J.-M. Lourtioz et al. – Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. – P. 426.
8. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
9. **Ахиезер, Н. И.** Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1970. – 304 с.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.9, 519.6

Валовик, Д. В.

Задача сопряжения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в плоском двухслойном нелинейном диэлектрическом волноводе / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 43–49.

**ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА
С УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ
ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА**

Аннотация. Рассматриваются игровые задачи наведения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла и игровая задача m лиц для положения равновесия системы функционалов (типа расстояния) в смысле Нэша. При решении этих задач используется известная экстремальная конструкция академика Н. Н. Красовского, модифицированная к рассматриваемым ситуациям.

Ключевые слова: игровая задача, стратегия, движение, позиция игры, программный максимин, управляющее воздействие.

Abstract. The article considers aiming game tasks for linear integro-differential Volterre's system with control action under the integral sign. The author studies the task of aiming to the point of origin and the m distinction game task for equilibrium position of the functional system (distance type) in Nashe's implication. To solve such problems the researcher suggests some modifications to the well-known extreme construction by prof. N. Krasovskiy.

Key words: game task, strategy, motion, game position, policy maximin, control action.

Статья продолжает исследование [1], а также нумерацию разделов, формул, определений и теорем в [1].

Так как эволюция систем описывается линейными векторными интегродифференциальными уравнениями Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла, то применение методов решения подобных задач для дифференциальных систем, развитых в [2–10] значительно усложняется.

**2. Игровая задача наведения для линейных
интегродифференциальных систем Вольтерра**

Рассматривается конфликтно-управляемая система линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \int_0^t B_1(t,s)u(s)ds - \int_0^t B_2(t,s)v(s)ds,$$
$$x(0) = x_0.$$

Здесь x – n -мерный фазовый вектор; u – r_1 -мерный, v – r_2 -мерный векторы управляющих воздействий, остальные ограничения аналогичны разд. 1 [1].

Игра рассматривается на заданном отрезке $[0, \theta]$ и плата изображается равенством

$$\gamma(\theta) = \left\| \{x(\theta)\}_m \right\|, m \leq n. \quad (24)$$

Состояние системы (23) описывается соотношением согласно (8)

$$x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0) + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \\ + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi_1(\tau,s)d\tau \right] u(s)ds - \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi_2(\tau,s)d\tau \right] v(s)ds.$$

Здесь $X(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{\alpha} = A(t)\alpha$,

$$\Phi(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)X(\tau,s)d\tau, \quad \varphi(t) = f(t) + \Phi(t,0)Z_0, \quad \Psi(t,s) = E + \int_s^t R(t,\tau)d\tau,$$

$R(t,\tau)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,\tau)$;

$$\chi_1(t,s) = \Psi(t,s)B_1(s,s) + \int_s^t \Psi(t,\tau) \frac{\partial B_1(\tau,s)}{\partial \tau} d\tau, \\ \chi_2(t,s) = \Psi(t,s)B_2(s,s) + \int_s^t \Psi(t,\tau) \frac{\partial B_2(\tau,s)}{\partial \tau} d\tau.$$

Будем теперь предполагать, что до момента t_0 , $0 \leq t_0 < \theta$, применялись некоторые допустимые управления $\omega_i[t]$, а после момента t_0 полагаем $\omega_i[t]$, тогда состояние системы (23) в момент t определяется формулой (9)

$$x(\theta,t) = x(\theta,t_0) + \int_0^t \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)d\tau \right] u(s)ds - \\ - \int_0^t \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)d\tau \right] v(s)ds. \quad (25)$$

Задача 3. Первый игрок распоряжается выбором управления $u(t) \in U_t$ и стремится минимизировать величину (24), второй игрок распоряжается выбором управления $v(t) \in V_t$ и стремится максимизировать величину (24). Здесь позиция игры определяется как пара $p = \{t, x(\theta,t)\}$.

Программный максимум для рассматриваемого случая определяется следующим образом:

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|V\|=1} \left\{ \int_{t_0}^\theta \max_{v(s) \in V_s} \left[\int_s^\theta l' X(\theta, \tau) \chi_2(\tau, s) d\tau \right] v(s) ds - \right.$$

$$-\int_{t_0}^{\theta} \max_{u(s)=u \in U_s} \left[\int_s^{\theta} (l'X(\theta, \tau)) \chi_1(\tau, s) d\tau \right] u(s) ds - (l'x(\theta, t_0)) \}. \quad (26)$$

Исходя из (18), введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, x(\theta, t)) &= \int_{t_0}^t \int_s^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_2(\tau, s) d\tau] v[s] ds + \\ &+ \int_t^{\theta} \max_{v(s)=v \in V_s} \left[\int_s^{\theta} l'_0 X(\theta, \tau) \chi_2(\tau, s) d\tau \right] v(s) ds - \int_{t_0}^t \int_s^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_1(\tau, s) d\tau] u[s] ds - \\ &- \int_t^{\theta} \max_{u(s)=u \in U_s} \left[\int_s^{\theta} l'_0 X(\theta, \tau) \chi_1(\tau, s) d\tau \right] u(s) ds - (l'_0 x(\theta, t_0)), \end{aligned} \quad (27)$$

где l'_0 – вектор-строка – решение задачи (26); $\{l'_0 X(\theta, t)\} = \alpha(t)$ – решение дифференциальной системы $\dot{\alpha} = -A'(t)\alpha$; далее вводим обозначения:

$$x^e(t) = \int_t^{\theta} \alpha'(\tau) \chi_1(\tau, t) d\tau, \quad y^e(t) = \int_t^{\theta} \alpha'(\tau) \chi_2(\tau, t) d\tau.$$

Производная (27) записывается аналогично (19):

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \int_t^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_2(\tau, t) d\tau] v(t) - \max_{v \in V_t} \int_t^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_2(\tau, t) d\tau] v - \\ &- \int_t^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_1(\tau, t) d\tau] u(t) + \max_{u \in U_t} \int_t^{\theta} [l'_0 X(\theta, \tau) \chi_1(\tau, t) d\tau] u, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = y^e(t)v(t) - \max_{v \in V_t} y^e(t)v - x^e(t)u(t) + \max_{u \in U_t} x^e(t)u,$$

экстремальное управление вычисляется согласно определению 4.

Теорема 4. В регулярном случае при выборе первым (вторым) игроком стратегии $U^e = U^e(t, x(\theta, t))$, $(V^e = V^e(t, x(\theta, t)))$, $t_0 \leq t \leq \theta$, $0 \leq t_0 < \theta$, описываемой определением 2.3, ему будет гарантирован результат игры $\|\{x(\theta)_m\}\| \leq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$ ($\|\{x(\theta)_m\}\| \geq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$) при любом допустимом способе управления второго (первого) игрока.

Доказательства аналогичны доказательствам теорем 1 и 2.

Теорема 5. В регулярном случае при выборе игроками своих экстремальных стратегий U^e, V^e , описываемых определением 2.3, им будет гарантирован результат игры $\| \{x(\theta)_m\} \| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Пример. Пусть движение управляемого объекта описывается системой двух скалярных уравнений:

$$\dot{x}(t) = e^t + \int_0^t x(s) ds + \int_0^t u(s) ds - \int_0^t v(s) ds,$$

здесь $f(t) = e^t, K(t, s) \equiv 1, A(t) \equiv 0, B(t, s) \equiv 1$.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $\dot{\alpha}(t) = 0$, тогда полагаем, что фундаментальная матрица $X(t, s) \equiv 1$, матрица Коши $X(t, s) = X(t)X^{-1}(s) \equiv 1$. Далее, как и в [10], $\Phi(t, s) = t - s$, резольвента этой матрицы $R(t, s) = \text{sh}(t - s)$, тогда $\Psi(t, s) = \text{ch}(t - s); \chi(t, s) = \Psi(t, s), \varphi(t) = e^t + t, \varphi(0) = 1$.

Слагаемые в (8) определяются формулами

$$\int_0^t X(t, s)\Psi(s, 0)ds\varphi(0) = \text{sh}t, \int_s^t X(t, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau = \text{sh}(t - s),$$

$$\int_0^t \left[\int_s^t X(t, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau \right] d\varphi(s) = t \left(\frac{1}{2}e^t - 1 \right) + \frac{1}{2}\text{sh}t;$$

получаем для начального условия $x(0) = 10$:

$$x(t) = 10 + \frac{3}{2}\text{sh}t + t \left(\frac{1}{2}e^t - 1 \right) + \int_0^t \text{ch}(t - s)u(s)ds - \int_0^t \text{ch}(t + s)v(s)ds.$$

Определяем начальную позицию игры:

$$x(\theta, t_0) = 1 + \frac{3}{2}\text{sh}\theta + \theta \left(\frac{1}{2}e^\theta - 1 \right) + \int_0^{t_0} \text{sh}(t_0 - s)u[s]ds - \int_0^{t_0} \text{sh}(t_0 - s)v[s]ds;$$

тогда в начальный момент управления имеем

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} \left\{ \int_{t_0}^{\theta} \max_{v(s)=v \in V_s} l' \text{sh}(\theta - s)v(s)ds - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u(s)=u \in U_s} l' \text{sh}(\theta - s)u(s)ds - l'x(\theta, t_0) \right\}.$$

Будем теперь считать, как и в [10], что игрок, распоряжающийся управлением u , выбирает его значения из отрезка $[2,5]$, а игрок, распоряжающийся управлением v , выбирает его из отрезка $[3,4]$. Так как решения исходной системы – кривые на плоскости, то заключаем, что экстремальный вектор l имеет постоянное направление по прямой $y = x$ в направлении убывания (по модулю) переменных x и y . При таком использовании ресурсов управления решение будет приведено в начало координат, так как $u^e = (5,5)$, а $v^e = (4,4)$.

4. Одна игровая задача для нескольких лиц

Рассматривается интегродифференциальная система

$$x(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t B_i(t,s)u_i(s)ds, \quad x(0) = x_0, \quad (28)$$

ее решение по аналогии со случаем двух игроков можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0) + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \\ & + \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i(s)ds, \end{aligned} \quad (29)$$

$u_i(t) \in U_t^i$, $i = \overline{1,m}$; U_t^i – выпуклые компакты в R^r ; $X(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{\alpha} = A(t)\alpha$;

$$\Phi(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)X(\tau,s)d\tau, \quad \varphi(t) = f(t) + \Phi(t,0)x_0, \quad \Psi(t,s) = E + \int_s^t R(t,\tau)d\tau,$$

E – единичная матрица, $R(t,s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,s)$;

$$\chi_i(t,s) = \Psi(t,s)B_i(s,s) + \int_s^t \Psi(t,\tau) \frac{\partial B_i(\tau,s)}{\partial \tau} d\tau.$$

Далее обозначаем

$$\begin{aligned} x(\theta, t_0) = & X(\theta,0)x_0 + \int_0^\theta X(\theta,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0) + \int_0^\theta \left[\int_s^\theta X(\theta,t)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \\ & + \int_0^{t_0} \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i[s]ds, \end{aligned}$$

тогда состояние системы (28) в момент $t_0 \leq t < \theta$ определяется формулой

$$x(\theta, t) = X(\theta, t_0) + \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right] u_i[s] ds.$$

Пусть также задана система функционалов

$$\Omega = \{I_i | I_i(u_1, \dots, u_m) = \phi_i(x[t]), i = \overline{1, m}\}. \quad (30)$$

Задача 4. Найти такие стратегии U_1^e, \dots, U_m^e , для которых выполняются соотношения

$$\phi_i(x^e[t]) \leq \phi_i(x^k[t]), i = \overline{1, m}. \quad (31)$$

Здесь $x^e(t)$ – реализовавшаяся траектория $x[t]$, $0 \leq t \leq \theta$, системы (28), которая отвечает стратегиям U_1^e, \dots, U_m^e ; $x^k(t)$ – реализовавшаяся траектория $x[t]$ системы (28), соответствующая управлениям $u_1^e[t], \dots, u_{k-1}^e[t], u_k[t], u_{k+1}^e[t], \dots, u_m^e[t]$, где $u_i^e[t]$, $i \neq k$, $i = \overline{1, m}$, формируется на основе стратегии U_i^e ; $u_k[t]$ – реализация суммируемого по Лебегу управления, стесненного условием $u_k(t) \in U_t^k$.

Если задача 4 разрешима, то набор стратегий $U^e = \{U_1^e, \dots, U_m^e\}$ называется равновесным по Нэшу. Как и при исследовании аналогичной задачи в [9], будем рассматривать случай, когда $I_i(u_1, \dots, u_m) = \|C_i - x(\theta)\|$, где C_i – заданные точки в R^n , $i = \overline{1, m}$.

Определение 5. Тройка $p = \{t, x(\theta, t), C_i\}$ называется позицией i -го игрока, $i = \overline{1, m}$, в момент t , $t_0 \leq t < \theta$, $0 \leq t_0 < \theta$; позиция $p_0 = \{t_0, x(\theta, t_0), C_i\}$ называется начальной.

Определение 6. Стратегией U_i i -го игрока, $i = \overline{1, m}$, называется многозначное отображение, которое каждой реализовавшейся позиции $p = \{t, x(\theta, t), C_i\}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество [1]

$$U_i(t, x(\theta, t), C_k) \div u_i(t, x(\theta, t), C_k) \subset U_t^i;$$

такие стратегии и соответствующие им управления называются допустимыми. Движения системы (28) определяются аналогично [3]. Будем теперь решать задачу за k -го игрока, $k = \overline{1, m}$, для чего запишем k -й функционал в виде программного максимина

$$\|C_k - x(\theta)\| = \varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), C_k) = \max_{\|l\|=1} [l'(C_k - x(\theta, t_0))] -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_k(s)=u_k \in U_t^k} \int_s^{\theta} l'X(\theta, \tau) \chi_k(\tau, s) d\tau u_k(s) ds - \\
 & \left. - \int_{t_0}^{\theta} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \min_{u_i(s)=u_i \in U_t^i} \left(\int_s^{\theta} l'X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right) u_i(s) ds \right], \quad (32)
 \end{aligned}$$

если правая часть этого равенства положительна, иначе $\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), C_k) = 0$; вектор, решающий задачу (32), называется экстремальным, обозначим его символом l_0^k , вектор-строка $l_0^{k'} X(\theta, t)$ является решением системы $\dot{\alpha}_k = -A'(t)\alpha_k$ с краевым условием $\alpha_k(\theta) = l_0^k$; для краткости обозначим $x_k^e(t_0) = \int_{t_0}^{\theta} \alpha_k'(\tau) \chi_k(\tau, t) d\tau$.

Предполагается, что при любом $t_0, 0 \leq t_0 < \theta$, максимум в правой части (32) достигается на единственном векторе l_0^k , т.е. рассматривается регулярный случай, причем вектор $l_0^k = l_0^k(t_0, x(\theta, t_0), C_k)$ непрерывно зависит от позиции игры как и в [2].

Определение 7. Пусть вектор $l_0^k, 1 \leq k \leq m$, в каждый момент $t_0, 0 \leq t_0 < \theta$, доставляет максимум правой части (32), тогда, если позиция $p = \{t_0, x(\theta, t_0), C_k\}$ такова, что $\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), C_k) > 0$, то с этой позицией будем сопоставлять множество $U_k^e(t_0, x(\theta, t_0), C_k), 1 \leq k \leq m$, всех векторов $U_k^e \subset U_t^k$, которые удовлетворяют условию

$$x_k^e(t_0) u_k^e[t] = \max_{u_k(t_0)=u_k \in U_t^k} x_k^e(t) u_k. \quad (33)$$

Аналогично [2] можно показать, что экстремальные стратегии, построенные по формуле (33), допустимы.

Теорема 6. В регулярном случае экстремальные стратегии $U_k^e, 1 \leq k \leq m$, уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (30).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_k(t, x(\theta, t), C_k) = & l_0^{k'}(C_k - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t \left[\int_s^{\theta} l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_k(\tau, s) d\tau \right] u_k(s) ds - \\
 & - \int_t^{\theta} \max_{u_k(s)=u_k \in U_s^k} \left[\int_s^{\theta} l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_k(\tau, s) d\tau \right] u_k(s) ds -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^t \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \min_{u_i(s)=u_i \in U_s^i} \left[\int_s^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right] u_i(s) ds - \\
& - \int_{t_0}^t \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left[\int_s^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right] u_i^e(s) ds. \quad (34)
\end{aligned}$$

Таким образом, предполагается, что в (32), (34) все игроки, за исключением k -го, на соответствующих промежутках выбрали управление наилучшим для себя образом, т.е. желают максимизировать (32). При $t = t_0$ все игроки применяют в (34) свои экстремальные стратегии. Обозначим эту величину символом $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0), C_k)$. Далее вычислим производную:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon_k(t)}{dt} = & - \int_t^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_k(\tau, t) u_k(t) + \max_{u_k(t)=u_k \in U_t^k} \int_t^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_k(\tau, t) u_k + \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_t^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, t) d\tau u_i^e(t) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \min_{u_i(t)=u_i \in U_t^i} \int_t^\theta l_0^{k'} X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, t) d\tau u_i. \quad (35)
\end{aligned}$$

Будем теперь в (34), а следовательно, и в (35), заменять при $t \in [t_0, \theta]$ управление k -го игрока на произвольное допустимое, а управления остальных игроков на экстремальные, тогда в правой части (35) $\forall t \in (t_0, \theta)$ суммы первого и второго слагаемых, суммы третьего и четвертого слагаемых положительны, следовательно, на (t, θ) $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \geq 0$, функция $\varepsilon(t)$ не убывает на (t_0, θ) и, таким образом, $\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), C_k) \leq \varepsilon(\theta, x(\theta, \theta), C_k)$, где $\varepsilon_k(\theta, x(\theta, \theta), C_k)$ – значение (34) для случая, когда k -й игрок применяет произвольное допустимое управление, а остальные игроки применяют свои экстремальные управления.

Список литературы

1. **Пассиков, В. Л.** Задача сближения-уклонения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пассиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2. – С. 58–70.
2. **Красовский, Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. **Красовский, Н. Н.** Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин – М.: Наука, 1974. – 456 с.
4. **Субботин, А. И.** Оптимизация гарантии в задачах управления / А. И. Субботин, А. Г. Ченцов – М.: Наука, 1981. – 288 с.
5. **Красовский, Н. Н.** Управление динамической системой / Н. Н. Красовский – М.: Наука, 1985. – 518 с.

6. **Осипов, Ю. С.** Дифференциальные игры систем с последствием / Ю. С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.
7. **Осипов, Ю. С.** Альтернатива в дифференциально-разностной игре / Ю. С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197, № 5. – С. 1025–1025.
8. **Субботин, А. И.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью / А. И. Субботин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 206, № 3. – С. 552–555.
9. **Субботин, А. И.** Дифференциальные игры с полной памятью. Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх / А. И. Субботин. – Свердловск, 1974. – С. 211–233.
10. **Гороховик, В. В.** О линейных дифференциальных играх нескольких лиц / В. В. Гороховик, Ф. М. Кириллова // Управляемые системы. – 1971. – № 10. – С. 3–9.

Пасиков Владимир Леонидович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математического
анализа и информатики, Орский
гуманитарно-технологический институт
(филиал) Оренбургского
государственного университета

E-mail: pasikov_fmf@mail.ru

Pasikov Vladimir Leonidovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematical analysis
and informatics, Orsk Humanitarian
Technological Institute, branch
of Orenburg State University

УДК 517.977

Пасиков, В. Л.

Игровые задачи наведения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 50–58.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОЕ
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Аннотация. Рассматривается задача о распространении электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Физическая задача сводится к решению нелинейной краевой задачи на собственные значения для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе предложен численный метод решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи. Приведены численные результаты на примере керровской нелинейности и нелинейности с насыщением.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши.

Abstract. The article considers a problem of electromagnetic TE-waves propagation in a layer with arbitrary nonlinearity. The physical problem is reduced to the nonlinear boundary eigenvalue problem for nonlinear ordinary differential equations. The author suggests a numerical method to find propagation constants and demonstrates numerical results for Kerr nonlinearity and nonlinearity with saturation.

Key words: nonlinear boundary eigenvalue problem, ordinary differential equation, Cauchy problem.

Введение

В данной работе рассматриваются электромагнитные ТЕ-волны, распространяющиеся через диэлектрический слой с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от интенсивности электрического поля. Слой расположен между двумя полупространствами с постоянными диэлектрическими проницаемостями. Разыскиваются поверхностные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границ слоя. Для нахождения таких волн краевая задача для системы уравнений Максвелла формулируется в строгой электродинамической постановке. Физическая задача приводит к нелинейной краевой задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения (нелинейного) второго порядка. В данной работе предлагается численный метод для нахождения собственных значений задачи (значений постоянных распространения, на которых существуют поверхностные волны). Предлагаемый метод основан на решении задачи Коши для упомянутого обыкновенного дифференциального уравнения. По рассматриваемой здесь задаче и близким к ней уже были получены некоторые как численные, так и аналитические результаты [1–3]. Однако заметим, что все численные результаты получены для наиболее простых нелинейностей и разработка простых, быстрых и эффективных численных методов для рассматриваемого класса задач остается актуальной проблемой.

Для решения рассматриваемой задачи [4] и близких к ней в [3, 5] был предложен и затем в [6] развит метод интегральных дисперсионных уравнений (МИДУ), который показал свою эффективность на широком классе за-

дач. Метод интегральных дисперсионных уравнений, в первую очередь, является аналитическим методом, но допускает также и численную реализацию. Однако необходимо отметить, что численная реализация МИДУ является непростой вычислительной задачей, поскольку для вычисления собственных значений требуется (в простых случаях) вычислять несобственные интегралы [7], а в общем случае требуется дополнительно решать задачу Коши на бесконечном интервале (последний случай еще не освещен в научной литературе). Все это заставляет искать более простые (с вычислительной точки зрения) методы для нахождения собственных значений.

Также стоит отметить, что проблемы распространения электромагнитных волн в нелинейных средах, в первую очередь в слоях и цилиндрических волноводах, привлекали и продолжают привлекать большое внимание исследователей [6–13].

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость ε_1 и ε_3 соответственно. Предполагается, что $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ – произвольные действительные числа. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Далее считаем, что поля гармонически зависят от времени:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – круговая частота; $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей \mathbf{E} и \mathbf{H} [10]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-.$$

Множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ ниже будут опущены.

Электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных компонент электромагнитного поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет следующий вид: $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(|\mathbf{E}|^2)$, где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости в слое (действительное число); f – некоторая непрерывная (действительнозначная) функция.

Также мы будем требовать выполнения условия $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Это условие естественно возникает в линейной задаче [6] (когда диэлектрическая проницаемость в слое является постоянной).

2. ТЕ-поляризованные электромагнитные волны

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T,$$

где $E_y = E_y(x, y, z)$, $H_z = H_z(x, y, z)$, $H_x = H_x(x, y, z)$ и $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Легко показать [6], что компоненты полей не зависят от переменной y .

Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Учитывая все сказанное, получаем, что компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют представление $E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}$, $H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}$, $H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя только что введенные компоненты в (1), можно показать, что система (1) сводится к следующему уравнению (подробности см. в [4, 6]):

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x). \quad (2)$$

Уравнение (2) получено из (1) после нормировки в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = kx, \quad \frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}, \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} (j=1, 2, 3),$$

где $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Используя обозначение $E_y = Y(\tilde{x})$ и опуская тильду, получаем уравнение (2).

Будем искать те значения спектрального параметра γ (собственные значения), для которых существуют действительные решения $Y(x)$ уравнения (2), γ полагаем действительным числом [6] и считаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 < x < h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Отметим еще, что в линейном случае должно выполняться неравенство $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$ [6]. Но в нелинейном случае это неравенство не обязательно имеет место, и мы будем считать, что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < a$, где $a < \infty$ [6].

Считаем, что функция $Y(x)$ дифференцируема так, что

$$Y(x) \in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0] \cap C^2[0, h] \cap C^2[h, +\infty).$$

Такие условия непрерывности и дифференцируемости функции Y соответствуют физическому смыслу задачи.

3. Решение системы дифференциальных уравнений

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ диэлектрическая проницаемость ε в уравнениях Максвелла (1) имеет постоянное скалярное значение ε_1 и ε_3 соответственно. Для этих полупространств получаем решения

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, \quad Z(x) = \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}; \quad (3)$$

$$X(x) = Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad Z(x) = -\gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad (4)$$

где учтены условия на бесконечности. Легко видеть, что должны выполняться неравенства $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$ и $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$ [6].

Постоянные A и B в решениях (3) и (4) определяются условиями сопряжения и начальными данными.

Внутри слоя $0 < x < h$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(Y^2)$. Уравнение (2) примет вид

$$Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2))Y. \quad (5)$$

4. Условия сопряжения

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_y и H_z . Отсюда получаем:

$$E_y(h+0) = E_y(h-0), \quad E_y(0+0) = E_y(0-0),$$

$$H_z(h+0) = H_z(h-0), \quad H_z(0+0) = H_z(0-0).$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае величина $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ также является непрерывной на границе раздела сред. Значит, справедливы условия

$$E'_y(h+0) = E'_y(h-0), \quad E'_y(0+0) = E'_y(0-0).$$

С учетом сказанного получаем условия сопряжения для функций Y и Y' :

$$[Y]_{x=0} = 0, \quad [Y]_{x=h} = 0, \quad [Y']_{x=0} = 0, \quad [Y']_{x=h} = 0, \quad (6)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Теперь условия непрерывности и дифференцируемости функции Y следуют из формул (3), (4) и (6).

Считаем, что функции $Y(x)$ и $Y'(x)$ удовлетворяют условию (это условие соответствует условию излучения на бесконечности)

$$Y(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ и } Y'(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Введем обозначения для граничных значений функций $Y(x)$ и $Y'(x)$ в точках $x = 0+0$ и $x = h-0$ (на границе слоя изнутри). Пусть

$$Y_0 := Y(0+0), Y_h := Y(h-0), Y'_0 := Y'(0+0), Y'_h := Y'(h-0). \quad (8)$$

Учитывая условия сопряжения (6) и обозначения (8), для постоянных A и B в решениях (3) и (4) мы получаем: $A = Y_0$, $B = Y_h$. Удобно переписать решения (3) и (4):

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0 e^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, & x < 0; \\ Y_h e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, & x > h, \end{cases} \quad (9)$$

где Y_0 – начальное условие; Y_h определяется из условий сопряжения.

Замечание. Рассматриваемая нелинейная задача на собственные значения существенно зависит от начального условия (амплитуды падающего поля). Аналогичная линейная задача от амплитуды падающего поля не зависит. Это значит, что каждому собственному значению линейной задачи отвечает целый «пучок» волн с одним и тем же γ и всевозможными амплитудами. В рассматриваемой нелинейной задаче это уже не так, собственные значения зависят от амплитуды.

Из (9) мы получаем, что

$$Y'(x) = \begin{cases} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 e^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, & x < 0; \\ -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Y_h e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, & x > h. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом последней формулы, условий сопряжения (6) и обозначений (8) получаем

$$\begin{aligned} Y'_0 &= \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0, \\ Y'_h &= -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Y_h. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь мы можем сформулировать краевую задачу на собственные значения (*задачу P*): необходимо найти собственные значения γ , для которых существуют нетривиальные функции $Y(x)$ такие, что при $x < 0$ и $x > h$ функции $Y(x)$ и $Y'(x)$ определяются выражениями (9), (10), где Y_0 – известная величина, а Y_h – неизвестная; при $0 < x < h$ функция Y удовлетворяет уравнению (5); функции Y и Y' удовлетворяют условиям сопряжения (6).

5. Описание «метода задачи Коши»

Предлагаемый ниже метод позволяет находить собственные значения рассматриваемой задачи с любой заданной точностью. Также предложенный метод позволит построить графики зависимости постоянной распространения (нормированной) γ от толщины слоя (нормированной) h . Дисперсионными кривыми в таких задачах традиционно называют кривые $\gamma = \gamma(\omega)$ (или $\gamma = \gamma(f)$), где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота. Если же кривая $\gamma(\omega)$ зависит от амплитуды падающего поля (что как раз имеет место в рассматриваемой задаче), то такие кривые называют энергетическими дисперсионными кривыми. Поскольку мы работаем в нормированных переменных, то будем называть дисперсионной кривой (или энергетической дисперсионной кривой) график зависимости $\gamma = \gamma(h)$. Если известен график $\gamma(h)$, то из него можно получить график $\gamma(\omega)$, не пересчитывая заново собственные значения.

Пусть $h^* > h_* > 0$ и $\gamma^* > \gamma_* > \sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}$ – некоторые числа. Будем считать, что

$$h \in [h_*, h^*] \text{ и } \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*].$$

Разбиваем отрезки $[h_*, h^*]$ и $[\gamma_*, \gamma^*]$ на n и m частей соответственно. Имеем сетку (h_i, γ_j) , $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$; причем $h_0 = h_* > 0$, $h_n = h^*$, $\gamma_0 = \gamma_* > \sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}$, $\gamma_m = \gamma^*$. Тогда для каждой пары индексов (i, j) будем иметь пару начальных значений $(Y_{ij}(0), Y'_{ij}(0))$, где $Y_{ij}(0) \equiv Y_0$ и $Y'_{ij}(0) = \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_1} Y_0$. Как легко видеть из предыдущего значения, $Y_{ij}(0)$ и $Y'_{ij}(0)$ не зависят от h_i , но мы оставляем двойные индексы для удобства.

Теперь можно поставить задачу Коши для уравнения (5) с начальным условием $Y_{ij}(0)$, $Y'_{ij}(0)$. Величина γ является параметром в системе (5) и решения этой системы зависят от γ . Решив указанную задачу Коши, получаем значения $Y_{ij}(h) \equiv Y_j(h_i)$ и $Y'_{ij}(h) \equiv Y'_j(h_i)$. Поскольку Y непрерывна при $x = h$, то это позволяет вычислить $Y(h+0)$, а именно: $Y_{ij}(h+0) = Y_j(h_i)$. Теперь, используя вторую формулу (9) и найденное $Y_{ij}(h+0)$, мы можем вычислить $Y'_{ij}(h+0)$: $Y'_{ij}(h+0) = -\sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_1} Y_{ij}(h+0)$. Но нам известно значение $Y'_{ij}(h-0)$ из решения задачи Коши. Принимая во внимание непрерывность $Y'(x)$ на границе $x = h$, построим функцию $F(h_i, \gamma_j) = Y'_{ij}(h+0) - Y'_{ij}(h-0)$. Можно показать (см. далее), что при определенных условиях функция $F(h_i, \gamma_j)$ является непрерывной функцией параметра γ . Пусть для заданного

h_i существуют такие γ_j и γ_{j+1} , что $F(h_i, \gamma_j)F(h_i, \gamma_{j+1}) < 0$. Это значит, что существует $\tilde{\gamma}_i \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ такое, что $\tilde{\gamma}_i$ является собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн и этому собственному значению соответствует толщина слоя h_i . Значение $\tilde{\gamma}_i$, когда оно существует, может быть найдено с любой степенью точности, например, методом дихотомии.

6. Обоснование численного метода

Сформулируем некоторые теоретические результаты, которые будут необходимы при обосновании численного метода. В частности покажем, при каких условиях задача Коши для уравнения (6) с начальными условиями

$$Y(0) = Y_0, \quad Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 \quad (12)$$

будет иметь единственное решение; покажем, что решение только что указанной задачи Коши непрерывно зависит от параметра γ .

Поскольку в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ уравнение (6) является линейным и его решения известны, то мы сразу перейдем к выяснению единственности решения задачи Коши для уравнения (5). Перепишем уравнение (5) в виде нормальной системы. Пусть $Y_1 := Y$, $Y_2 := Y'$, тогда

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2)) Y_1 \end{cases} \quad (13)$$

с начальными условиями

$$Y_1 = Y_0, \quad Y_2 = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0. \quad (14)$$

Пусть функции Y_1 и Y_2 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|Y_1 - Y_0| \leq b, \quad \left| Y_2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 \right| \leq b, \quad (15)$$

где b – некоторая постоянная; и пусть существует такое число M , что справедливы неравенства

$$|Y_2| \leq M, \quad \left| (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2)) Y_1 \right| \leq M. \quad (16)$$

Тогда, применяя теорему Пикара [14, с. 165] получаем следующее

Утверждение 1. Решение задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14) непрерывно дифференцируемо, единственное и существует при $x < b/M$, где постоянные b и M определяются формулами (15), (16).

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости от параметра γ решений задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14).

В системе (13) сделаем замену переменной $\tilde{x} = x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}$. Тогда получаем

$$\begin{cases} Y_1' = \frac{Y_2}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, \\ Y_2' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2)) \frac{Y_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \end{cases} \quad (17)$$

и

$$Y_1(0) = Y_0, \quad Y_2(0) = Y_0, \quad (18)$$

причем $\tilde{x} \in [0, h\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}]$.

Теперь мы имеем задачу Коши для системы (17) с начальными условиями (18). Легко видеть, что начальные условия (18) не зависят от параметра γ .

Пусть постоянная b определена, как выше, а постоянная M_γ такова, что для всех $\gamma \in (\gamma^*, \gamma^*)$ справедливы неравенства

$$|Y_2| \leq M_\gamma, \quad \left| (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2)) Y_1 \right| \leq M_\gamma. \quad (19)$$

Тогда, применяя теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра [14, с. 183], получаем следующее

Утверждение 2. Решение $Y_1(x, \gamma)$, $Y_2(x, \gamma)$ задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14) непрерывно дифференцируемо относительно x , единственно и существует при всех $x < b/M_\gamma$, непрерывно зависит от γ для всех $\gamma \in (\gamma^*, \gamma^*)$, где постоянные b и M_γ определены формулами (15) и (19) соответственно.

При выполнении условий утверждения 2 можно показать, что функция $F(h_i, \gamma)$, построенная в п. 5 является непрерывной функцией параметра γ .

7. Численные результаты

А. Керровская нелинейность

Рассмотрим случай керровской нелинейности. В данном случае диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид: $\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 \alpha |\mathbf{E}^2|$, где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Решения в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ описываются формулами (9).

Внутри слоя $0 < x < h$ получаем уравнение

$$Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha Y^2) Y. \quad (20)$$

Замечание. Решение уравнения (20) выражается через эллиптические функции [1, 15], и это позволяет провести исследование рассматриваемой задачи независимо [1], что очень важно для тестирования предложенного здесь вычислительного метода. Кроме того, керровская нелинейность может быть исследована с помощью МИДУ [6].

Все утверждения, полученные при описании случая произвольной нелинейности, справедливы и в рассматриваемом случае.

На рис. 1 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых, полученных из работ [1, 6] и с помощью предложенного в данной работе метода.

Сплошные кривые обозначают результаты расчетов, полученных другими авторами, а точки получены с помощью предложенного в этой работе метода.

Для вычислений были использованы следующие параметры: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 4$, $Y_0 = 1$, $\gamma > 2$, $\alpha = 0$.

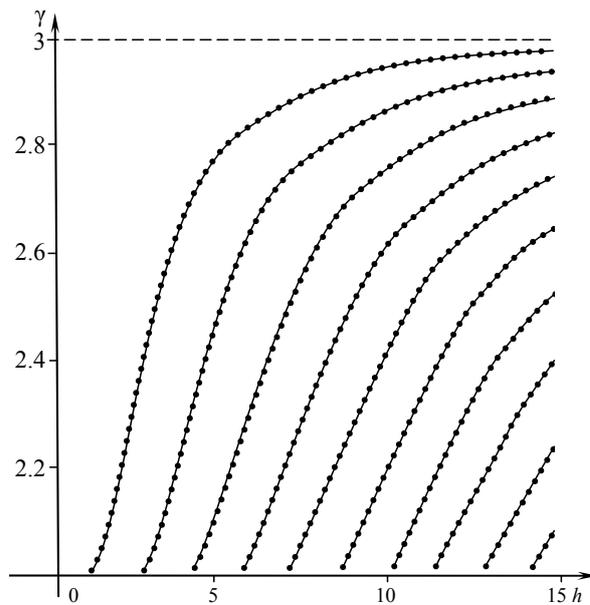


Рис. 1

На рис. 2 показана зависимость γ от h для ТЕ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью при следующих значениях начальных параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = 1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = 0,02$, $Y_0 = 1$. Пунктиром, ниже основных линий, показаны решения дисперсионного уравнения для случая линейной среды в слое. Как видно, значение $\gamma^2 = 1,7$ является асимптотой для линейного слоя.

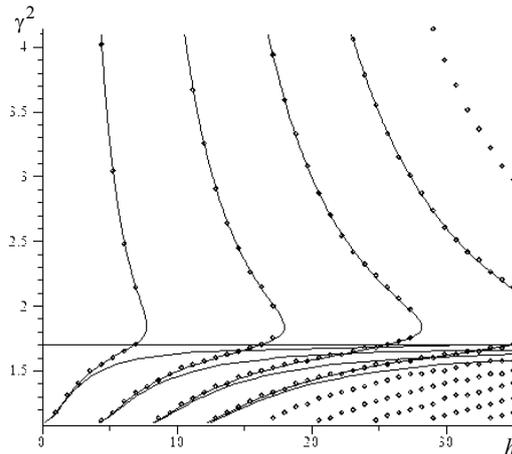


Рис. 2

На рис. 3 изображены дисперсионные кривые, отвечающие следующим параметрам: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = 1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = -0,1$, $Y_0 = 1$. Из работы [1] известно, что при $\alpha < 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon > 0$, $\varepsilon_2 > \varepsilon$ дисперсионные кривые терпят разрыв при $\gamma_1^2 = \varepsilon_2 - \sqrt{-\alpha(2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + \alpha)}$. Это может указывать на изменение характера собственных функций, отвечающих собственным значениям, лежащим на различных частях дисперсионных кривых. При численных экспериментах в работе [1] для собственных значений $\gamma^2 > \gamma_1^2$ получались собственные функции с особенностями. Из численных экспериментов было установлено, что численный метод, используемый в этой работе для выбранных значений параметров, вычисляет собственные значения, только когда выполняется условие $1,1 < \gamma^2 < 1,368$. Легко подсчитать, что $\gamma_1^2 = \varepsilon_2 - \sqrt{-\alpha(2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + \alpha)} \approx 1,3683$. Таким образом, полученные результаты согласуются с результатами, полученными в [1].

На рис. 4 представлены результаты расчетов для следующих значений параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = -1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = 5,7$, $Y_0 = 1$.

Б. Нелинейность с насыщением

Рассмотрим случай нелинейности с поглощением. В этом случае дисперсионные кривые могут быть построены с использованием МИДУ [2]. Это опять позволяет провести сравнение уже известных результатов с полученными при применении предложенного здесь численного метода. Но нужно отметить, что уже в этом случае при некоторых значениях параметров численный метод, полученный на основе МИДУ, встречает трудности при численной реализации. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_0 \alpha |E^2|}{1 + \beta |E^2|},$$

где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

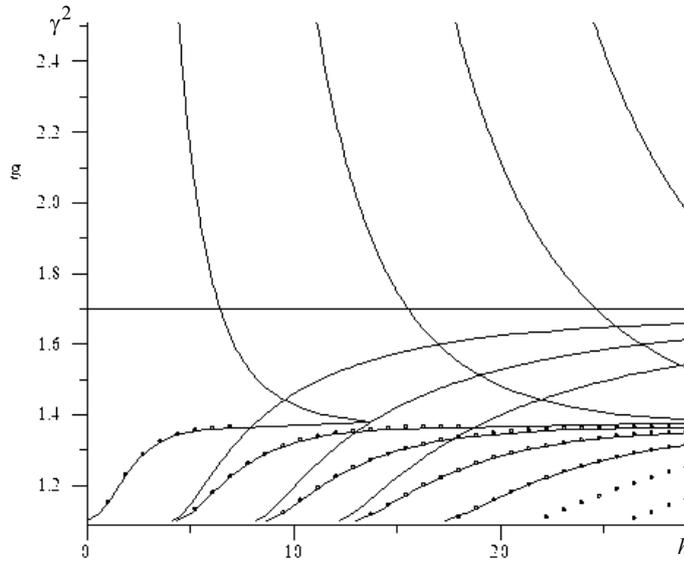


Рис. 3

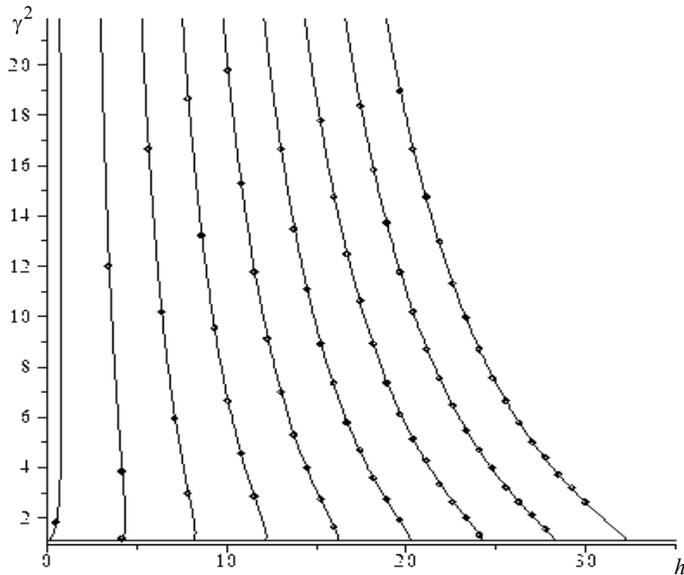


Рис. 4

Решения в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ описываются формулами (9).
 Внутри слоя $0 < x < h$ получаем уравнение

$$Y'' = \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2} \right) Y. \tag{21}$$

Замечание. Решение уравнения (21), хоть и сводится к квадратурам, однако его уже не удастся выразить в замкнутой форме.

Все утверждения, полученные при описании случая произвольной нелинейности, справедливы и в рассматриваемом случае.

В работе [2], в частности, получено неравенство

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1},$$

когда $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Трудности при численной реализации МИДУ возникают, когда величина $\alpha\beta^{-1} \geq 10$, т.е. в случае, если α на порядок или более превосходит β . Как будет видно далее, использованный здесь метод не имеет подобного недостатка.

На рис. 5 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых, полученных из работы [2] и с помощью предложенного в данной работе метода.

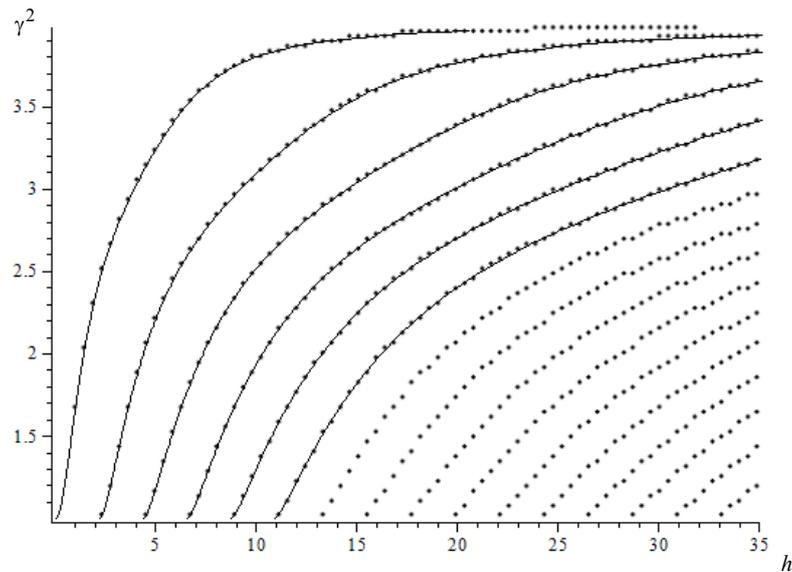


Рис. 5

На рис. 5–7 представлены дисперсионные кривые для нелинейного слоя при различных значениях коэффициентов нелинейности α и β . При расчетах взяты следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 1$, $Y_0 = 1$. На рис. 5 дисперсионные кривые отвечают следующим значениям коэффициентов нелинейности $\alpha = \beta = 0,1$; на рис. 6: $\alpha = \beta = 0,01$; на рис. 7: $\alpha = \beta = 0,001$. На рис. 5–7 проводится сравнение с результатами расчетов из [2].

На рис. 8 представлены результаты расчетов при $\alpha = 0,00001$; $\beta = 0,01$.

На рис. 9 расчеты выполнены при $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,0001$. Также изображена кривая в случае керровской нелинейности при значениях коэффициента $\alpha = 0,01$.

Представленные графики демонстрируют хорошее согласие результатов, полученных предложенным методом с уже известными результатами.

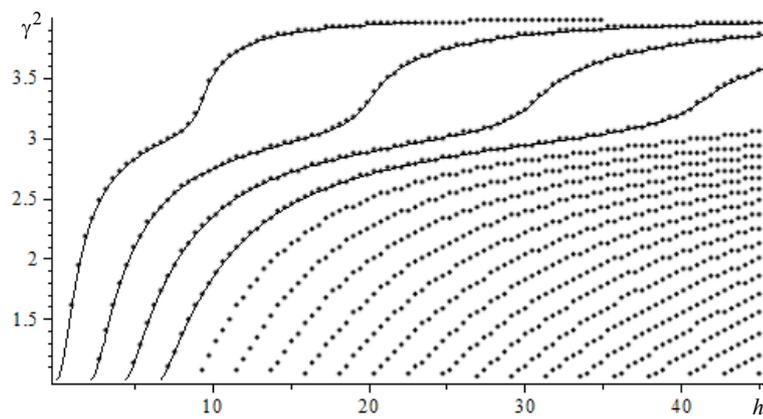


Рис. 6

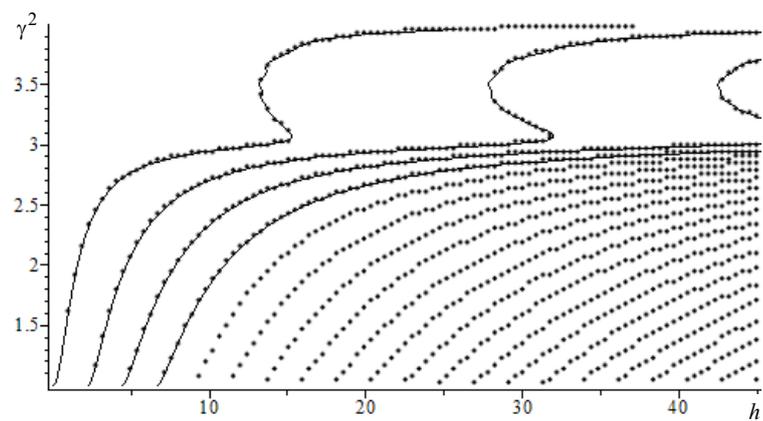


Рис. 7

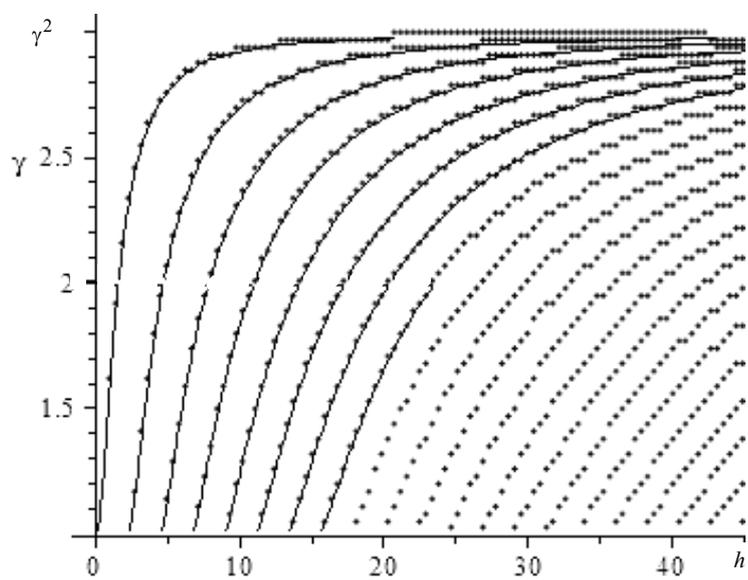


Рис. 8

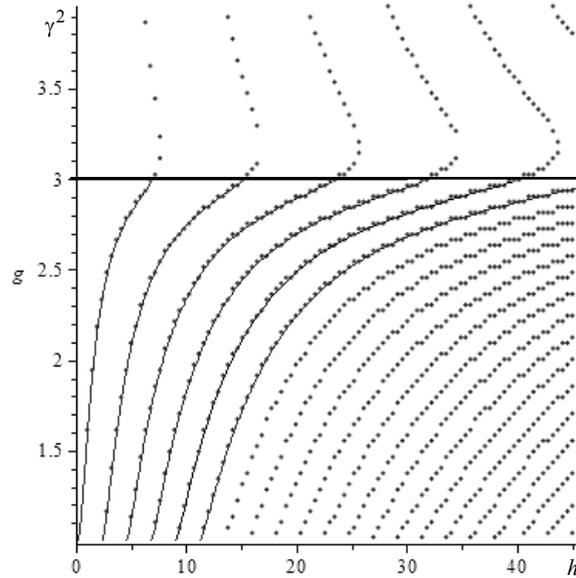


Рис. 9

Заключение

Отметим, что описанный в данной работе метод обладает важными достоинствами: метод прост в реализации (все известные математические пакеты могут решать задачу Коши); метод работает значительно быстрее, чем численный метод, основанный на реализации МИДУ или численный метод, предложенный в [7]; метод может быть применен для изучения широкого класса нелинейностей, в частности таких нелинейностей, для которых первый интеграл системы (5) не позволяет легко воспользоваться МИДУ.

Важно отметить, что предложенный метод эффективен в случае, если множество собственных значений рассматриваемой краевой задачи является дискретным, причем на собственных значениях полная производная по спектральному параметру от функции $F(h_i, \gamma)$ не равна нулю.

Еще отметим, что общий метод для нахождения изолированных собственных значений в нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида $y'' = f(x, y, y', \gamma)$ был развит в работе [16]. Однако подчеркнем, что здесь мы предлагаем численный метод для конкретных задач электродинамики, объединенных общей постановкой, и, кроме того, предложенный здесь метод может быть развит для системы уравнений в нормальной форме (см., например, [17] для случая керровской нелинейности, для общей нелинейности метод будет развит в одной из следующих работ автора). Ясно, что далеко не всякую нормальную систему двух уравнений первого порядка можно свести к одному уравнению второго порядка вида $y'' = f(x, y, y', \gamma)$.

Список литературы

1. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 587–599.

2. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
3. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
4. **Валовик, Д. В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 18–27.
5. **Валовик, Д. В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.
6. **Smirnov, Yu. G.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik. – Penza : PSU Press, 2011. – 248 p.
7. **Зарембо, Е. В.** Об одном численном методе решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с Керровской нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1. – С. 75–82.
8. **Ахманов, С. А.** Проблемы нелинейной оптики / С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. – М. : ВИНТИ, 1964. – 296 с.
9. **Бломберген, Н.** Нелинейная оптика / Н. Бломберген. – М. : Мир, 1966.
10. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical nonlinear waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
11. Nonlinear surface electromagnetic phenomena (Modern problems in condensed matter sciences, Vol. 29) / ed.: H.-E. Ponath, G. I. Stegeman. – Netherlands : Elsevier Science publishers, 1991.
12. **Es'kin, V. A.** Exact solutions for the source-excited cylindrical electromagnetic waves in a nonlinear nondispersive medium / V. A. Es'kin, A. V. Kudrin, E. Yu. Petrov // Physical Review E. – 2011. – V. 83. – P. 067602-1–067602-4.
13. **Hao Xiong.** Solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell equations / Hao Xiong, Liu-Gang Si, Chunling Ding, Xin-You Lü, Xiaoxue Yang, Ying Wu // Physical Review E. – 2012. – V. 85. – P. 016602-1–016602-5.
14. **Еругин, Н. П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1979. – 744 с.
15. **Schürmann, H. W.** Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity / H. W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35. – P. 10789–10801.
16. **Волков, Е. А.** Об исследовании и решении разностным методом нелинейных задач для обыкновенного дифференциального уравнения / Е. А. Волков // Труды МИАН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 103–129.
17. **Валовик, Д. В.** О методе задачи Коши решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с Керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Е. В. Зарембо // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57 (принята к печати).

Зарембо Екатерина Викторовна

аспирант, Пензенский
государственный университет

Zaremba Ekaterina Viktorovna

Postgraduate student,
Penza State University

E-mail: y_tak@yandex.ru

УДК 517.927, 519.62, 517.958

Зарембо, Е. В.

Численный метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 59–74.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ОТРАЖЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрен численный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения. Получены результаты, показывающие сходимость метода. Представлены графики зависимости значения эффективной диэлектрической проницаемости от числа итераций.

Ключевые слова: обратная задача дифракции, эффективная диэлектрическая проницаемость, итерационный метод

Abstract. The article considers a numerical method of effective permittivity definition by the reflection coefficient. The author demonstrates the results of the method convergence and presents the figures of permittivity value dependence on the number of iterations.

Key words: inverse diffraction problem, effective permittivity, iteration method.

Введение

Настоящая работа посвящена задаче определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения. Рассматриваются неоднородные образцы материалов произвольной геометрической формы, помещенные в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. Задача может быть сведена к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения [1]. Данное интегральное уравнение было изучено в [2], при этом использовались результаты исследования соответствующей краевой задачи и теорема эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. В работах [3–5] была доказана теорема о существовании и единственности решений нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения и обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов. Для случая однородного тела были получены численные результаты в [6], некоторые особенности реализации численного алгоритма показаны в [7].

Данная задача может быть применена в нанотехнологии и наноэлектронике, она позволяет определять диэлектрические и магнитные параметры нанокomпозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией. Ввиду композитного характера материалов при экспериментальном измерении эти параметры, как правило, труднодоступны [8, 9], что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и находить решение численно [10].

1. Постановка обратной задачи

Пусть объемное тело Q расположено в прямоугольном волноводе $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$, поверхность волновода ∂P идеально проводящая. Данное тело характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) -матрицей-функцией (тензором) ди-

электрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ представляют собой ограниченные функции в области \bar{Q} , $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q является кусочно-гладкой. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В области $P \setminus \bar{Q}$ среда является изотропной и однородной, при этом $\varepsilon_0 (> 0)$, $\mu_0 (> 0)$ являются постоянными.

Будем решать следующую задачу дифракции. Необходимо найти электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$. Данное поле возбуждается сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. При этом источником стороннего поля является электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3)$ с компактным носителем в R^3 .

Рассмотрим обобщенные решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решений (1) должны выполняться условия на бесконечности [11]: поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \sum_p R_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(1)} |x_3|) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \bar{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \varepsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \bar{e}_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(2)} |x_3|) \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \bar{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \bar{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь «+» соответствует $+\infty$, «-» соответствует $-\infty$; $\bar{e}_{1,2,3}$ – орты в декартовой системе координат; $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ – полные системы собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно. В выражении (2) $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$ ($k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\nabla_2 \equiv \bar{e}_1 \partial / \partial x_1 + \bar{e}_2 \partial / \partial x_2$). Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для всех $m \in N$.

Условия (2) с физической точки зрения означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Усло-

вия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность их почленного дифференцирования по x_j любое число раз.

Для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau |_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu |_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (4) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали.

Пусть также \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} – единичный тензор):

$$\text{rot } \mathbf{H}^0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \text{rot } \mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0 |_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu^0 |_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью введенного ниже тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например, \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Компоненты диагонального тензора Грина \hat{G}_E представляют собой фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в P с коэффициентом $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Для этих компонент выполняются краевые условия первого или второго рода на поверхности волновода ∂P , обеспечивающие обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода. Компоненты тензора Грина имеют вид [1]

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2,$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2,$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2.$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$ и $\text{Re } \gamma_{nm} \geq 0$, если

$\text{Im } \gamma_{nm} = 0$. Здесь k_0 – волновое число свободного пространства, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$; ω – круговая частота.

Решение поставленной задачи, описанной выше, сводится к интегро-дифференциальному уравнению [1] относительно поля \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе.

2. Решение обратной краевой задачи

Будем рассматривать изотропный случай. Пусть $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon$, ε – константа, которую мы будем определять (эффективная диэлектрическая проницаемость образца) [4, 10, 12]. Предположим, что $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что $\text{Im } \gamma_1^{(2)} = 0$, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$ и $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$ для всех p, j , за исключением $p=1$ и $j=2$. Пусть падающее поле имеет вид

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3},$$

где $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда распространяющейся волны. Тогда в (2) $\psi_1 = \cos \pi x_1/a$. Следовательно, $G_E^1 \rightarrow 0$ и $G_E^2 \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. Мы также получаем

$$G_E^2 - \frac{1}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} |x_3 - y_3|} \rightarrow 0,$$

равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. Затем мы имеем $\text{div } \widehat{G}_E \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$ (потому что $\frac{\partial G_E^2}{\partial x_2} \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$). Вычислив предел при $x_3 \rightarrow -\infty$ в (2), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q G_E^2(r) \left(\left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] E(y) \cdot e_2 \right) dy, \quad x \in P/Q, \quad (9)$$

принимая во внимание условие на бесконечности при $x_3 \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + e_2 Q_1^{(-)} e^{i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} = \\ e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + \\ + \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)}(x_3 - y_3)} \left(\left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] E(y) e_2 \right) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этого следует асимптотическое уравнение:

$$Q_1^{(-)} = k_0^2 \frac{1}{b\gamma_{10} i\pi\omega\mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3} \left(\left[\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I} \right] E(y) e_2 \right) dy. \quad (11)$$

Мы предполагаем, что коэффициент $Q_1^{(-)}$ известен из эксперимента. Уравнение (11) – это дополнительное условие, из которого будет определяться диэлектрическая проницаемость материала. Коэффициент $Q_1^{(-)}$ зависит от круговой частоты ω .

Обратная задача определения тензорной диэлектрической проницаемости образца материала, помещенного в волновод, состоит в том, чтобы найти проницаемость по известному коэффициенту отражения $Q_1^{(-)} = Q_1^{(-)}(\omega)$, измеренному на различных частотах.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} Q_1^{(+)}}{k_0^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (14)$$

а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (15)$$

Подставляя (12) и (14) в формулу (9), мы получаем нелинейное объемное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем линейный интегральный оператор:

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (17) в операторной форме:

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (18)$$

Пусть $\tilde{A}^{(+)} = A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a}$, $\tilde{C} = \frac{C}{\tilde{A}^{(+)}}$ и

$$r_* = \left(\frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0 \mathbf{f}\| |(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})|}{\|A_0\| \|\mathbf{f}\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|}{\|A_0\|}. \quad (19)$$

Теорема. Пусть выполнены условия $(\bar{f}, f) \neq 0$ и

$$|\tilde{C}| < F \equiv |(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})| \frac{\left(1 - \frac{2r_* \|\mathbf{f}\|}{|(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})|} \right)}{\|A_0\|}. \quad (20)$$

Тогда существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (16). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (12). Кроме того, приближенное решение уравнения (16) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})} \left\{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C(A_0 \mathbf{E}_n) \right\}, \quad (21)$$

который сходится для любого начального приближения $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, где r_* определяется формулой (19). Теорема может быть доказана аналогично [1].

Условие (14) имеет место, если величина $Q_1^{(-)}$ достаточно мала. С физической точки зрения это означает, что амплитуда прошедшей волны не сильно отличается от амплитуды падающей волны.

Рассмотрим схему итерационного процесса (21) для решения нелинейного интегрального уравнения (16). При $n = 0, 1, \dots$ на каждом шаге необхо-

димо (численно) вычислять действие линейного объемного сингулярного интегрального оператора A_0 . Алгоритм вычислений описан в [13]. Алгоритм суммирования рядов представлен в [1]. В качестве начального приближения естественно взять $E_0 = E^0$. После решения уравнения (16) с заданной точностью с помощью итерационной процедуры (21) по формулам (10)–(12) находим неизвестную эффективную диэлектрическую проницаемость ε .

3. Численные результаты

Аналитическое решение задачи дифракции на секции в волноводе было получено в [14]. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_1$ и найдем коэффициент B по формуле

$$B = 2iA \frac{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right) \sin(\gamma c)}{\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{-i\gamma c} - \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{i\gamma c}},$$

где $\gamma_1 = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$, $\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$.

Возьмем в качестве коэффициента $Q_1^{(-)}$, при решении обратной краевой задачи итерационным методом – коэффициент B , и будем вычислять ε . На рис. 1–3 представлены полученные результаты, которые демонстрируют сходимость итерационного метода в пределах области сходимости

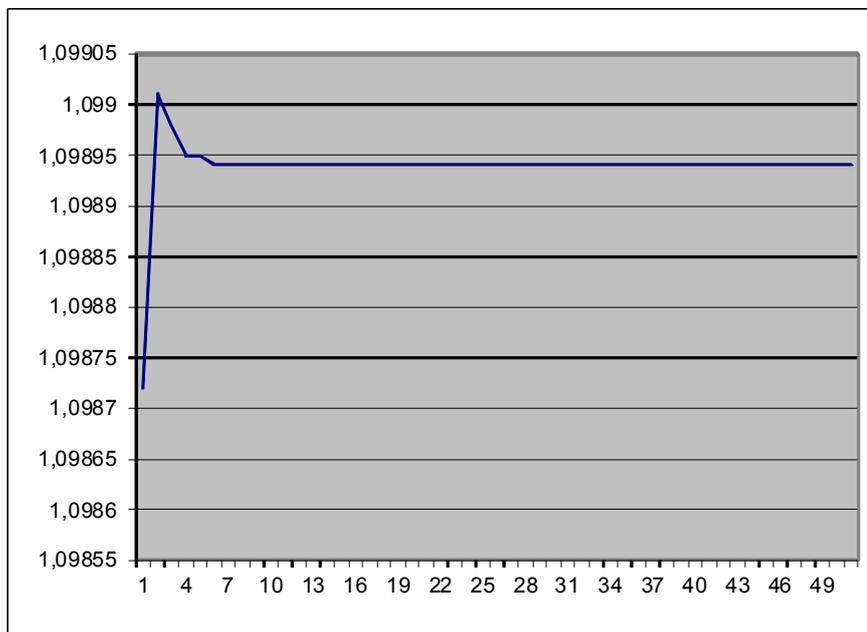


Рис. 1. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ε от числа итераций n при значениях параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

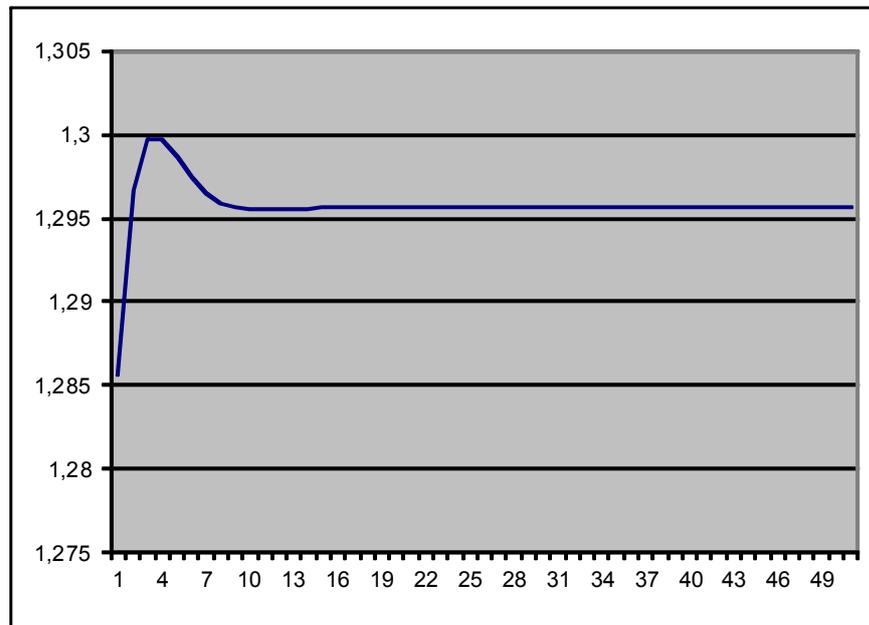


Рис. 2. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ε от числа итераций n при значениях параметров $\varepsilon_1 = 1,3$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

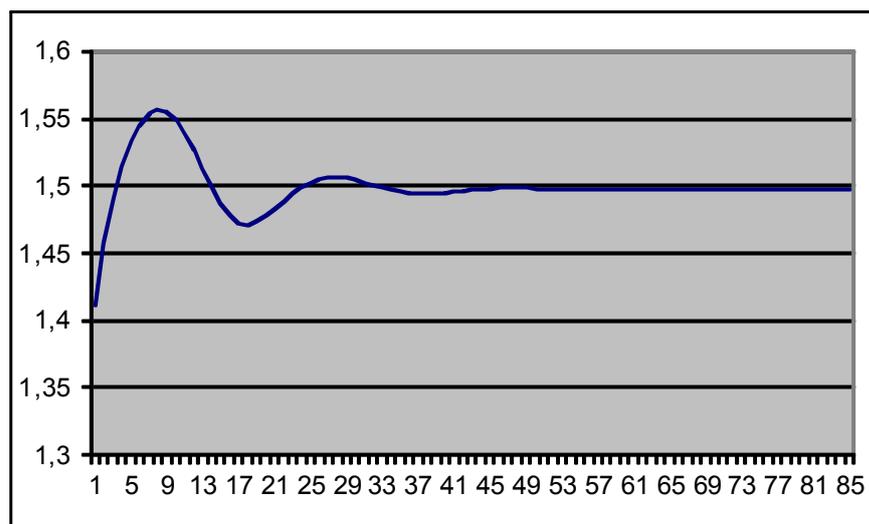


Рис. 3. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ε от числа итераций n при значениях параметров $\varepsilon_1 = 1,5$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

Список литературы

1. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–54.

2. **Kobayashi, K.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / Kobayashi K., Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G. // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. – 2009. – V. 70, № 3. – P. 969–983.
3. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
4. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Миронов. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587–1597.
5. **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of the complex permittivity reconstruction of a dielectric body in a waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // *Inverse Problems*. – 2010. – V. 26. – P. 1–14.
6. **Smirnov, Y.** Analysis of Inverse Scattering in a Waveguide using the Method of Volume Singular Integral Equation / Y. Smirnov, Y. Shestopalov, D. Mironov // *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010)*. – Berlin, Germany, 2010. – P. 532–534.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
8. **Solymar, L.** *Waves in Metamaterials* / L. Solymar, E. Shamonina. – New York : Oxford University Press, 2009. – 384 p.
9. **Zharova, N. A.** Nonlinear Transmission and Spatiotemporal Solutions in Metamaterials with Negative Refraction / N. A. Zharova, I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, Yu. S. Kivshar // *Optics Express*. – 2005. – V. 13, № 4. – P. 1291–1298.
10. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // *Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, October 22–25*. – Antalya, Turkey, 2008.
11. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
12. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // *Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008) (July 2–6 2008)*. – Cambridge, USA, 2008. – P. 291–292.
13. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998. – 160 с.
14. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2010. – № 2. – С. 44–53.

Гришина Елена Евгеньевна
аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Grishina Elena Evgenyevna
Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.3

Гришина, Е. Е.

Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения / Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 75–84.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ХОПФИЛДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены нейронные сети Хопфилда с запаздыванием и разрывными функциями активации.

Ключевые слова: нейронные сети Хопфилда, асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову.

Abstract. The author investigates Lyapunov asymptotic stability of Hopfield neural networks with time lag, described by systems of nonlinear normal differential equations. The article considers Hopfield neural networks with time lags and discontinuous activation functions.

Key words: Hopfield neural networks, asymptotic stability, Lyapunov stability.

Введение

Новый класс рекуррентных нейронных сетей, известных как нейронные сети Хопфилда, (НСХ) был введен Хопфилдом тридцать лет назад [1, 2]. С тех пор НСХ являются предметом активных исследований. НСХ имеют несколько типичных применений: они применяются при решении оптимизационных проблем и используются как ассоциативная память.

В последнее время НСХ применяются для решения задач математической физики. Во всех случаях применения НСХ желательно, чтобы сеть имела единственную стационарную точку и была устойчива относительно этой точки. Еще более предпочтительна асимптотическая устойчивость или даже равномерная асимптотическая устойчивость. Большое число работ посвящено исследованию устойчивости различных дискретных, непрерывных и импульсных НСХ с запаздыванием и без запаздывания [3–8].

Целью данной статьи является исследование равномерной асимптотической устойчивости НСХ с запаздываниями с непрерывными и разрывными функциями активации. Для НСХ без запаздывания аналогичные результаты получены в предыдущей работе автора [6] (см. также [8].)

Статья построена следующим образом. В разделе 1 приводятся необходимые определения. В разделе 2 исследуется устойчивость НСХ с непрерывными функциями активации. В разделе 3 исследуются НСХ с разрывными функциями активации.

1. Постановка задачи

В работе исследуются непрерывные НСХ следующих видов:

$$C_k \frac{dx_k(t)}{dt} = -\frac{1}{R_k} x_k(t) + \sum_{l=1}^n \omega_{kl} \varphi_l(x_l(t-\tau)) + I_k, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$C_k \frac{dx_k(t)}{dt} = -\frac{1}{R_k} x_k(t) + \varphi_k \sum_{l=1}^n \omega_{kl} (x_l(t-\tau)) + I_k, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь n – число нейронов в сети; $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор состояния сети в момент времени t ; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – функции активации нейронов; R_k, C_k, I_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – сопротивления, емкости и внешние токи соответственно.

Формально нейронные сети (1), (2) могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t)\varphi_l(x_l(t-\tau)) + I_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

и системой

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \varphi\left(\sum_{l=1}^n w_{kl}(t)x_l(t-\tau)\right) + I_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Метод исследований устойчивости нейронных сетей (1), (2), развитый в данной статье, также применим и к исследованию нейронных сетей вида

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = a_k(t, x_k) \left[b_k(t, x_k) - \sum_{l=1}^n c_{kl}(t)\varphi_l(x_l(t-\tau)) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Будем считать, что в моделях (3)–(5) в промежутке времени $0 \leq t \leq \tau$

$$x_k(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Напомним некоторые определения и обозначения.

Прежде всего приведем определение устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)) \quad (7)$$

с начальным значением

$$x(t_0) = x_0. \quad (8)$$

Будем считать, что задача Коши (7)–(8) имеет решение при $t_0 \leq t < \infty$.

Выделим некоторое решение $x(t) = \varphi(t)$ уравнения (7) и назовем его невозмущенным движением (невозмущенным решением).

Определение 1. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого как угодно малого $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ следует $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ (здесь через $x(t)$ обозначено любое решение уравнения (7), определенное начальным условием $x(t_0)$).

Определение 2. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$.

Определение 3. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется экспоненциально устойчивым, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\|x(t) - \varphi(t)\| \leq Ae^{-\alpha t}$, где A и α – положительные константы, не зависящие от t .

Определение 4. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво при любом $x_0 \in B$.

Введем следующее определение.

Определение 5. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется равномерно асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\|x(t_2) - \varphi(t_2)\| < \|x(t_1) - \varphi(t_1)\|$ при $x_2 > x_1$.

Приведем обозначения, используемые в статье. Пусть X – банахово пространство, K – оператор, действующий из X в X . Тогда $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$, $S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\}$, $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [9] выражением

$$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hK\| - 1}{h},$$

где $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

В монографии [9] показано, что $\Lambda(A)$ всегда существует (но может принимать отрицательные значения). Там же приведены следующие свойства логарифмической нормы:

$$\Lambda(\alpha A) = \alpha \Lambda(A), \quad \alpha \geq 0, \quad |\Lambda(A)| \leq \|A\|; \quad \Lambda(A + B) \leq \Lambda(A) + \Lambda(B);$$

$$|\Lambda(A) - \Lambda(B)| \leq \|A - B\|; \quad \Lambda(A) + \Lambda(-A) \geq 0, \quad e^{-\Lambda(-A)} \leq \|e^A\| \leq e^{\Lambda(A)}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка $-\Lambda(-A) \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \Lambda(A)$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$.

Для наиболее употребительных норм логарифмическая норма известна.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [10]

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right).$$

В данной работе используется третья норма.

2. Устойчивость нейронных сетей с непрерывными функциями активации

Вначале исследуем устойчивость нейронной сети (3) в предположении, что $\varphi_l(u)$ – гладкие функции, $-\infty < u < \infty$.

Пусть $x^*(t) = \{x_1^*(t), \dots, x_n^*(t)\}$ – решение системы уравнений (3) при нулевых начальных условиях. Исследуем устойчивость решения $x^*(t)$ при возмущении начальных условий.

Сделаем замену переменных: $x_k(t) = z_k(t) + x_k^*(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда система уравнений (3) принимает вид

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \left(\varphi_l(z_l(t-\tau) + x_l^*(t-\tau)) - \varphi_l(x_l^*(t-\tau)) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Устойчивость системы (3) будем исследовать отдельно в промежутке времени $0 \leq t \leq \tau$ и $\tau \leq t < \infty$.

В промежутке времени $0 \leq t \leq \tau$ система уравнений (9) имеет вид

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (10) при начальном возмущении

$$z_k(0) = \beta_k, \quad (11)$$

где $\|z(0)\| < \delta$.

Здесь $z(0) = \{z_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Можно показать [8], что при выполнении условия

$$a_k(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

тривиальное решение системы уравнений (10) устойчиво.

При выполнении условия

$$a_k(t) \geq \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

тривиальное решение системы уравнений (10) асимптотически устойчиво.

В обоих случаях эти условия гарантируют нахождение траектории решения задачи Коши (9), (11) внутри шара $B(0, \delta)$.

Перейдем к исследованию устойчивости решения системы уравнений (9) при $t \geq \tau$. В качестве начального условия возьмем решение задачи Коши (9), (11) в момент времени $t = \tau$. Следовательно, будем рассматривать систему уравнений (9) при начальных условиях

$$z_k(\tau) = \beta_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

и при предыстории $z_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 \leq t \leq \tau$.

При этом можно налагать различные условия на вектор-функцию $\Phi(z) = \{\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n)\}$. Предположим, что функции $\varphi_k(z), k=1, 2, \dots, n$, разлагаются в равномерно сходящиеся в некоторой окрестности нуля степенные ряды по переменной z .

Тогда систему уравнений (9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Предполагая, что производные $\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau)), l=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots$, равномерно ограничены по модулю константой B , вместо системы (13) ограничимся системой уравнений

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Из дальнейшего будет очевидно, что при приведенных выше условиях из устойчивости системы (14) следует устойчивость системы уравнений (13).

Замечание. Условие ограниченности модулей производных всех порядков константой B очень жесткое. Ниже будет показано, что полученные в этом разделе критерии устойчивости справедливы и при выполнении условий $\|\varphi^{(k)}(x)\|_{C[0,T]} \leq B^k k^k, k=0, 1, \dots, B \leq 1/e$.

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (14) при начальном приближении (12). Доказательство устойчивости проведем от противного. Предположим, что в момент времени T траектория системы (14), (12) покидает шар $B(0, 2\delta_0)$, проходя через точку $z(T)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $|z_1(T)| = \delta$.

Представим систему уравнений (14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dz_k(t)}{dt} = & -a_k(T)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(T) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!} \frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)} z_1^j(t) - \\ & -(a_k(t) - a_k(T))z_k(t) + \sum_{l=1}^n (w_{kl}(t) - w_{kl}(T)) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!} \frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)} z_1^j(t) + \\ & + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau)) - \varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!} \frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)} z_1^j(t) + \\ & + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!} \frac{z_l^j(t-\tau) - z_1^j(T-t)}{z_1^j(T)} z_1^j(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Из непрерывности функций $a_k(t), w_{kl}(t), \varphi_l^{(j)}(z_l^*(t-\tau)), z_l^j(t-\tau), k=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, n, j=1, 2$, следует, что для любого $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ найдется

такой промежуток времени $[T, T_1], T_1 = T + \Delta T$, что при $t \in [T, T_1]$ $\|\Psi(t)\| \leq \varepsilon \|z(t)\|$, где $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)\}^T$,

$$\begin{aligned} \Psi_k(t) = & -(a_k(t) - a_k(T))z_k(t) + \\ & + \sum_{l=1}^n (w_{kl}(t) - w_{kl}(T)) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(z_l^*(T - \tau)) z_l^j(t - \tau)}{j! z_1^j(T)} z_1^j(t) + \\ & + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t - \tau) - \varphi_l^{(j)}(x_l^*(T - \tau)) z_l^j(t - \tau)}{j! z_1^j(T)} z_1^j(t) + \\ & + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t - \tau) z_l^j(t - \tau) - z_l^j(T - \tau))}{j! z_1^j(\tau)} z_1^j(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Будем считать, что в промежутке времени $[T, T_1]$

$$\|z(t - \tau)\| \ll \|z(T)\|.$$

В противном случае вместо сегмента $[T, T_1]$ можно взять меньший промежуток времени $[T, T_2]$, где $T_2 < T_1$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= \{-a_1(T), \dots, -a_n(T)\}; \\ \beta(T) &= \{\beta_1(T), \dots, \beta_n(T)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= \sum_{l=1}^n w_{kl}(T) \frac{\varphi_l^{(1)}(x_l^*(T - \tau)) z_l(T - \tau)}{1! z_1(T)}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ \gamma_k(T) &= \sum_{l=1}^n w_{kl}(T) \frac{\varphi_l^{(2)}(x_l^*(T - \tau)) z_l^2(T - \tau)}{2! z_1^2(T)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Введем матрицы $A(T)$, $B(T)$, $\Gamma(t)$. Матрица $A(T)$ является диагональной, элементы $a_{jj}(T)$, $j = 1, 2, \dots, n$, которой равны $a_{jj}(T) = -a_j(T)$.

Матрица $B(T)$ составлена из элементов $b_{ij}(T)$, определяемых равенствами $b_{i1}(T) = \beta_i(T)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $b_{ij}(T) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, n$.

Матрица $\Gamma(T)$ составлена из элементов $\gamma_{ij}(T)$, определенных равенствами $\gamma_{i1}(T) = \gamma_i(T)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\gamma_{ij}(T) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, n$.

Система уравнений (15) может быть записана в более компактной форме:

$$\frac{dz_k}{dt} = \alpha_{kk}(T)z_k(t) + b_{k1}(T)z_1(t) + \gamma_{k1}z_1^2(t) + \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

В операторной форме система уравнений (16) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = A(T)z(t) + B(T)z(t) + \Gamma(T)z^2(t) + \Psi(t), \quad (17)$$

где $z(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$.

Решение задачи Коши (17), (12) в операторной форме имеет вид

$$z(t) = e^{(A(T)+B(T))(t-T)} z(T) + \int_T^t e^{(A(T)+B(T))(t-s)} (\Gamma(T)z^2(s) + \Psi(s)) ds. \quad (18)$$

Переходя в (18) к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq e^{\Lambda(A(T)+B(T))(t-T)} \|z(T)\| + \\ &+ \int_T^t e^{\Lambda(A(T)+B(T))(t-s)} (\|\Gamma(T)\| \|z^2(s)\| + \|\Psi(s)\|) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как $\|\Psi(s)\| \leq \varepsilon \|z(s)\|$ при $s \in [T, T_1]$, а

$$\begin{aligned} \|\Gamma(T)\| &= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_{kl}(T) \frac{\varphi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau))}{2!} \frac{z_l^2(T-\tau)}{z_l^2(T)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |w_{kl}(T)| \frac{|\varphi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau))|}{2!} \leq K, \end{aligned}$$

то

$$\|\Gamma(T)\| \|z^2(s)\| + \|\Psi(s)\| \leq (K \|z(s)\| + \varepsilon) \|z(s)\| \leq \chi \|z(s)\|.$$

Введем функцию

$$\varphi(t) = e^{-\Lambda(A(T)+B(T))t} \|z(t)\|,$$

тогда неравенство (19) можно представить в виде

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + \chi \int_0^t \varphi(s) ds. \quad (20)$$

Применяя к (20) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\varphi(t) \leq e^{\chi(t-T)} \varphi(T).$$

Возвращаясь к нормам, приходим к неравенству

$$\|z(t)\| \leq e^{(\Lambda(A(T)+B(T))+\chi)(t-T)} \|z(T)\|. \quad (21)$$

Из неравенства (21) следует, что если $\Lambda(A(T)+B(T))+\chi < 0$, то траектория $z(t, z(0))$ решения задачи Коши (9), (11) не покидает шара $B(0, \delta)$ в течение промежутка времени $t \in [T, T_1]$.

Так как по определению устойчивости по Ляпунову величина δ может быть взята достаточно малой, то при выполнении неравенства $\Lambda(A(T) + B(T)) < 0$ найдется такое δ_* и такой промежуток времени ΔT_* , что при начальном условии $\|z(0)\| < \delta_*$ и в течение промежутка времени $[T, T + \Delta T_*]$ $\Lambda(A(T) + B(T)) + \chi < 0$. Таким образом, при выполнении этих условий получено противоречие, и траектория $z(t, z(0))$ в момент времени T не покидает шара $B(0, \delta)$.

Покажем, что при выполнении при $0 \leq t < \infty$ следующих условий:

- а) $\Lambda(A(t) + B(t)) \leq -\nu, \nu > 0$,
 б) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(2)}(t_\tau)|}{2!} \leq K$,

тривиальное решение системы уравнений (14) устойчиво.

В самом деле, из условия (б) следует равномерная ограниченность суммы

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(2)}(t_\tau)|}{2!} \text{ при } 0 \leq t \leq \infty.$$

Следовательно, найдется такое δ_* , что $K\delta_* < \nu/4$. Тогда любая траектория решения уравнения (9), начавшаяся в шаре $B(0, \delta_*)$, ее не покидает.

Покажем, что условия (а) и (б) достаточные для равномерной асимптотической устойчивости.

Рассмотрим траекторию решения уравнения (9) при начальном условии $z(0), \|z(0)\| = \delta_*$, где δ_* было определено выше. Тогда, как показано выше, существует такой промежуток времени ΔT_0 , что при $t \in [0, \Delta T_0]$

$$\|z(t)\| \leq e^{-\nu t/4} \|z(0)\|.$$

Для момента времени $T_1 = \Delta T_0$ также существует промежуток времени ΔT_1 такой, что при $t \in [T_1, T_1 + \Delta T_1]$ $\|z(t)\| \leq e^{-\nu t/4} \|z(T_1)\|$. Следовательно, $\|z(T_2)\| \leq e^{-\nu(\Delta T_0 + \Delta T_1)/4} \|z(0)\|$.

Продолжая этот процесс, имеем

$$\|z(T_{k+1})\| \leq e^{-\nu \left(\sum_{l=0}^k \Delta T_l \right) / 4} \|z(0)\|. \quad (22)$$

Из неравенств (22) следует, что если $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \Delta T_k = \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$.

Так как $\Delta T_k \geq 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$, то имеются две возможности:

- 1) $\lim_{l=0}^{\infty} \sum \Delta T_k = \infty$;

$$2) \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta T_k = T_*.$$

В первом случае, как показано выше, имеет место равномерная асимптотическая сходимость.

Рассмотрим второй случай. Если $\|z(T_*)\| = 0$, то доказательство завершено. Пусть $\|z(T_*)\| \neq 0$. Так как функция $z(t)$ непрерывная, то существует предел $\lim_{t \rightarrow T_*} \|z(t)\| = \|z(T_*)\|$. Взяв $z(T_*)$ в качестве начального

приближения, убеждаемся, что существует промежуток времени $[T_*, T_* + \Delta T_{**}]$, в течение которого $\|z(t)\| < e^{-\nu(t-T_*)/4} \|z(T_*)\|$. Обозначим через T_{**} максимальный промежуток времени, в течение которого выполняется неравенство $\|z(t)\| < e^{-\nu t/4} \|z(0)\|$. Очевидно, $\|z(T_{**})\| = 0$, так как в противном случае предыдущее неравенство может быть продолжено на промежуток $[T_{**}, T_{**} + \Delta T_{**}]$.

Таким образом, при выполнении второй возможности $\|z(T_*)\| = 0$.

Осталось рассмотреть общий случай, когда выполняются условия

$$\|\varphi^{(j)}(x)\|_{C[0, \infty]} \leq B^j j^j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \dots$$

Как показано выше, для равномерной асимптотической устойчивости достаточно потребовать выполнения условий:

$$а) \Lambda(A(t) + B(t)) \leq -\nu, \quad \nu > 0, \quad 0 \leq t \leq \infty;$$

$$б) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(j)}(t_\tau)|}{j!} \leq K, \quad K = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Очевидно,

$$\frac{|\varphi_l^{(j)}(t - \tau)|}{j!} \leq \frac{B^j j^j}{j!} \sim \frac{B^j j^j}{\sqrt{2\pi j}} \left(\frac{e}{j}\right)^j \sim \frac{(Be)^j}{\sqrt{2\pi j}}.$$

Следовательно, при $B < e^{-1}$,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(j)}(t - \tau)|}{j!} \leq K.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$а) \Lambda(A(t) + B(t)) \leq -\nu, \quad \nu > 0, \quad 0 \leq t \leq \infty;$$

$$б) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(j)}(t - \tau)|}{j!} \leq K, \quad K = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Тогда неподвижная точка нейронной сети (3) равномерно асимптотически устойчива.

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для нейронных сетей (4).

3. Устойчивость нейронных сетей с разрывными функциями активации

В данном разделе исследуется устойчивость нейронных сетей, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями вида (3) в предположении, что функции $\varphi_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $-\infty < u < \infty$, непрерывны всюду, за исключением конечного числа точек, в которых они имеют разрывы первого рода. Не ограничивая общности, можно считать, что имеется только одна точка разрыва. Пусть функции $\varphi_i(u)$ имеют вид

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} \varphi_i^*(u), & u > u_*, \\ \varphi_i^{**}(u), & u < u_*, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

где u_* – точка разрыва.

На функции $\varphi_i^*(u)$, $\varphi_i^{**}(u)$ наложим следующие условия:

1) функции $\varphi_i^*(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывно продолжаются на интервал $[u_*, \infty)$;

2) функции $\varphi_i^{**}(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывно продолжаются на интервал $(-\infty, u_*]$.

В работе автора [6] (см. также [8]) исследована устойчивость НСХ без задержки при условии, что функции активации разрывны. В качестве аппарата исследования были использованы дифференциальные включения.

Использование дифференциальных включений для исследования устойчивости НСХ с запаздыванием приводит к сложным критериям устойчивости. Поэтому ниже будет использован другой подход.

Будем считать, что функции $\varphi_i^*(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, разлагаются в равномерно сходящиеся ряды в интервале $[0, \infty)$, а функции $\varphi_i^{**}(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, разлагаются в равномерно сходящиеся ряды в интервале $(-\infty, 0]$.

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем разделе, систему уравнений (3) приведем к виду (13).

Дальнейшее исследование будем проводить при следующих условиях:

1) разрыв в точке u^* имеет только одна из функций $\varphi_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для определенности положим, что разрывной является функция $\varphi_1(u)$. Нетрудно видеть, что это ограничение не уменьшает общности рассуждений и введено только для простоты формулировок;

2) если $u^* = 0$, то функция $\varphi_1(u)$ определяется выражением

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1^*(u), & 0 \leq u < \infty, \\ \varphi_1^{**}(u), & -\infty < u < 0. \end{cases}$$

Для определенности ниже полагается $u \neq 0$ и используется формула (23).

При сделанных предположениях систему уравнений (13) удобно представить в виде двух систем уравнений:

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{*(j)}(z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k=1,2,\dots,n,$$

при $z_l(t-\tau) > u^*$,

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^n w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{***(j)}(z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k=1,2,\dots,n,$$

при $z_l(t-\tau) < u^*$.

По аналогии с разделом 2 введем матрицы

$$A(T), B_1(T), B_2(T), \Gamma_1(T), \Gamma_2(T),$$

где

$$A(T) = \{\alpha_{ij}(T)\}, \quad \alpha_{ii}(T) = -a_i(T), \quad i=1,2,\dots,n, \quad \alpha_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$B_1(T) = \{\beta_{ij}^*(T)\}, \quad \beta_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_l^{*(1)}(z_l(T-\tau))}{1!}, \quad \beta_{ij}^*(T) = 0, \quad j \neq 1, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$B_2(T) = \{\beta_{ij}^{**}(T)\}, \quad \beta_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_l^{***(1)}(z_l(T-\tau))}{1!},$$

$$\beta_{ij}^{**}(T) = 0, \quad j \neq 1, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$\Gamma_1(T) = \{\gamma_{ij}^*(T)\}, \quad \gamma_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_l^{*(2)}(z_l(T-\tau))}{2!}, \quad \gamma_{ij}^*(T) = 0, \quad j \neq 1, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$\Gamma_2(T) = \{\gamma_{ij}^{**}(T)\}, \quad \gamma_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_l^{***(2)}(z_l(T-\tau))}{2!},$$

$$\gamma_{ij}^{**}(T) = 0, \quad j \neq 1, \quad i,j=1,2,\dots,n.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

а) $\Lambda(A(t) + B_i(t)) \leq -\nu, \quad \nu > 0, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad i=1,2;$

б) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{*(j)}(t-\tau)|}{j!} \leq L, \quad 0 \leq t \leq \infty;$

в) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{*(j)}(t-\tau)|}{j!} \leq L, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad L = \text{const}, \quad 0 < L < \infty.$

Тогда неподвижная точка нейронной сети (3) с точками разрыва функций активации равномерно асимптотически устойчива.

Доказательство. Обозначим через δ_* положительное число, удовлетворяющее неравенству $L\delta_* < \nu/4$. Покажем, что любая траектория

$z(t, z_0)$, $z_0 \in B(0, \delta_*)$, начинающаяся в шаре $B(0, \delta_*)$, не покидает этого шара. Доказательство проведем от противного. Предположим, что в момент времени T траектория $z(t, z_0)$ покидает шар $B(0, \delta_*)$, проходя через точку z_* , $\|z_*\| = \delta_*$. Предположим также, что $|z_1(T, z_0)| = \delta_*$, $|z_i(T, z_0)| < \delta_*$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Будем считать, что $z_1(T, z_0) > u_*$.

Тогда при таких значениях t , что $z_1(T, z_0) > u_*$ систему уравнений (13) можно представить в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B_1(t)z(t) + \Gamma_1(t)z^2(t) + \Psi(t). \quad (24)$$

При доказательстве теоремы 1 было показано, что при выполнении условий (а) и (б) норма $\|z(t)\|$ монотонно убывает и $\|z(t)\| < \delta_*$. Так как по условию теоремы функция $\frac{dz(t)}{dt}$ равномерно ограничена, то функция $z(t)$ непрерывна и существует такой момент времени T^* , что $z_1(T^*) = u_*$. При $t > T^*$ динамика нейронной сети описывается уравнением

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B_2(t)z(t) + \Gamma_2(t)z^2(t) + \Psi(t), \quad (25)$$

а в качестве начального значения можно взять любое значение z_0 , удовлетворяющего условиям: $z_0 < u_*$, $z_0 \in B(0, \delta_*)$, а в качестве начального момента времени можно взять T^{**} , $T^{**} > T^*$. Это предположение законно, так как в момент времени T^* о траектории $z(t, z_0)$ известно лишь то, что $\|z(t, z_0)\|$ монотонно убывает и $z(T^*, z_0) \in B(0, \delta^*)$.

Повторяя применительно к системе (25) рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в равномерной сходимости $\|z(t)\|$ к нулю.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Hopfield, J. J.** Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J. J. Hopfield // *Proceeding of the National Academy of Science*. – 1982. – V. 79. – P. 1554–2558.
2. **Hopfield, J. J.** Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons / J. J. Hopfield // *Proceeding of the National Academy of Science*. – 1984. – V. 81. – P. 3088–3092.
3. **Ye Hui.** Wang Kaining Global and local stability of Hopfield neural networks with delay / Ye Hui, Michel Antiny N. // *Phys. Rev. E* 50. – 1994. – № 5. – P. 4206–4213.
4. **Bhaya, A.** Existence and stability of a unique equilibrium in continuous-valued discrete-time asynchronous Hopfield neural networks / A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, V. S. Kozyakin // *IEEE Transactions on Neural Networks*. – 1996. – V. 7 (3). – P. 620–628.
5. **Cao, J. D.** Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays / J. D. Cao, J. Wang // *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*. – 2003. – V. 50 (1). – P. 34–44.

6. **Бойков, И. В.** Устойчивость нейронных сетей Хопфилда / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 9. – С. 124–140.
7. **Wu, A.** Global Asymptotical Stability of Delayed Impulsive Neural Networks without Lipschitz Neuron Activations / A. Wu, J. Zhang, C. Fu // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2010. – V. 10, № 5. – P. 806–818.
8. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.
9. **Далецкий, Ю. А.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
10. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вербер. – М. : Мир, 1988. – 334 с.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University

УДК 518.5

Бойков, И. В.

Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием /
И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.
Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 85–97.

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТИПА «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Аннотация. Рассматриваются математические модели типа «хищник-жертва». Приводятся примеры исследования нелинейных динамических моделей на устойчивость по части переменных.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотическая устойчивость по части переменных, модель «хищник-жертва».

Abstract. The article considers mathematical models of “predator-prey” type and introduces the examples of examination of nonlinear dynamic models for variables stability.

Key words: system of ordinary differential equations, asymptotic stability of variables, «predator-prey» model type.

Введение

Исследование математических моделей экологических сообществ необходимо для изучения устойчивости, стабильности экосистем, так как только устойчивые экосистемы могут существовать достаточно долго. С проблемой устойчивости связаны вопросы эксплуатации природных популяций и сообществ, оценки пределов загрязнения среды, прогноз последствий осуществления тех или иных природно-хозяйственных мероприятий.

В математической экологии и биофизике получила признание классическая модель Лотки – Вольтерра – модель взаимодействия изолированных популяций, например, хищника и жертвы в классе обыкновенных дифференциальных уравнений, а также обобщение данной модели на случай N видов [1]. В работе [2] предлагается термодинамическая модель многовидового сообщества, анализ устойчивости сообщества проводится на основе изменения энтропии в системе. В работе [3] рассмотрен широкий класс моделей экологических систем, особое внимание уделено определениям и методам анализа устойчивости в рамках математических моделей изучаемых экосистем.

Возможность адаптации экосистемы к постоянно изменяющимся условиям окружающей среды связана с вопросом о существовании устойчивых режимов функционирования биологических сообществ. Простейшие математические модели взаимодействия популяций типа «хищник-жертва», учитывающие лишь локальную кинетику, демонстрируют колебания численности и неустойчивые режимы. На примере взаимодействия двух популяций этот вопрос изучался во многих работах [4–7]. Введение в модели дополнительных регуляторных механизмов, например самоограничение в каждой популяции, повышают их устойчивость по отношению к внешним воздействиям. Особенно мощное стабилизирующее влияние оказывает неоднородность среды обитания [8]. Учет в моделях пространственных процессов не только приближает описание к реальности, но и может обеспечить устойчивую динамику численности в системе «хищник-жертва».

Настоящая работа посвящена изучению процессов изменения структуры взаимодействующих сообществ в экологии, описываемых нелинейными

обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для исследования одной из основных задач системной динамики – оценки устойчивости систем – применяется метод сравнения Е. В. Воскресенского [9].

1. Постановка задачи

Рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа [10]:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_1 \left(r \left(1 - \frac{z_1}{K} \right) - \frac{z_2}{z_1 + p} \right) - H, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_2 \left(-d + \frac{kz_1}{z_1 + p} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где z_1, z_2 – численность популяций жертвы и хищника соответственно.

Если популяция хищников отсутствует, то размер популяции жертв растет со скоростью r . Здесь $k > 0$ – удельный коэффициент рождаемости «жертвы»; $p > 0$ – эффективный коэффициент популяционного роста численности популяций (выражает влияние на скорости роста–гибели каждой популяции при наличии другой популяции); $d > 0$ – скорость естественной гибели популяции хищников в единицу времени в расчете на одного хищника в отсутствие жертв, емкость среды ограничена величиной K , и безграничный рост жертв в отсутствие хищника невозможен. Эта величина, называемая емкостью популяции, определяется ограниченностью пищевых ресурсов, многими факторами, которые могут быть различными для разных видов. Таким образом, емкость экологической ниши представляет собой системный фактор, который определяет ограниченность роста популяции в данном ареале обитания; H – константа – верхний порог численности популяций жертв;

$g(z_1) = r \left(1 - \frac{z_1}{K} \right)$ – удельная скорость роста популяции жертв в отсутствие популяции хищника, причем $g(z_1) \geq 0$ – непрерывна и убывает по z_1

$\varpi(z_1) = \frac{z_1}{z_1 + p} > 0$, $\left(\frac{z_1}{z_1 + p} \right)' > 0$ – функция взаимодействия видов.

Положение равновесия (z_1^*, z_2^*) системы (1) имеет вид

$$z_1^* = \varpi^{-1} \left(\frac{d}{k} \right), \quad z_2^* = \frac{d}{k} \left(z_1^* g(z_1^*) - H \right),$$

где $z_1^* g(z_1^*) > H$.

Чтобы исследовать на устойчивость состояние равновесия (z_1^*, z_2^*) системы (1), положим $z_i = x_i + z_i^*$ ($i=1,2$). Тогда вопрос об устойчивости точки равновесия $z^* = (z_1^*, z_2^*)$ системы (1) сведется к вопросу об устойчивости ну-

левого решения $x^* = (0, 0)$ соответствующей системы уравнений для $z = (z_1, z_2)$. Эта система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r\alpha_1 - \frac{r}{K}\alpha_1^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + p} - H, \\ \frac{dx_2}{dt} = -d\alpha_2 + \frac{k\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + p}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha_1 = x_1 + z_1^*$, $\alpha_2 = x_2 + z_2^*$.

Для применения метода сравнения Е. В. Воскресенского запишем систему (2) в матричной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x); \quad (3)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}; \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix};$$

$$f_1(t, x) = rz_1^* - \frac{r\alpha_1^2}{K} - \frac{r\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + p} - H, \quad f_2(t, x) = -dz_2^* + \frac{k\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + p}.$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ уравнения (3) существует для всех начальных условий $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T$, $T = [0, +\infty)$. Предполагается также, что уравнение (3) имеет нулевое решение, которое является единственным состоянием равновесия экосистемы, описываемой дифференциальным уравнением (2). Все результаты сформулируем относительно этого решения при $\bar{M}_0 = N$.

Пусть первое линейное приближение системы (3) имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (4)$$

Рассмотрим множества $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \bar{M}_0 \subseteq N$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$; подмножества N_0 , M , \bar{M}_0 и M_0 определяются следующими условиями:

1. $|f_j(t, x_j, \dots, x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|, \dots, |x_{j_q}|)$, $\forall j \in N$, $\{j_1, \dots, j_q\} \in M_0$;
 $\lambda_j : [T, +\infty) \times R_+^q \rightarrow R_+^1$, $R_+^1 = [0, +\infty)$, $\lambda_j \in C([T, +\infty) \times R_+^q)$, $\lambda_j(t, r_1, \dots, r_i, \dots, r) \leq \lambda_j(t, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_q)$, $r_i \leq \bar{r}_i, i = \overline{1, q}$ при всех $t \in [T, +\infty)$.
2. $R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1, \dots, x_n), x_j = 0, j \neq \bar{M}_0\}$.
3. Фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t)), i, j = \overline{1, n}$, нормирована в точке $t_0 \in [T_0, +\infty)$, $T_0 \geq T$, $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t)), i, j = \overline{1, n}$.
4. Эталонные функции сравнения $\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1, m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|$, $T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$, если

$N_0 \neq 0$; если $N_0 = 0$, то $\mu_i \geq 0$; $m_i(t) \geq \max \left\{ \max_{j \in M_0} |y_{ij}|, \mu_i(t) \right\}$, $T_0 \leq t < +\infty$,
 $i \in M_0$.

5. Пусть

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \sum_{\substack{j \in M \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \\ - \int_t^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds,$$

$B = N \setminus M$, $J_i(t, \varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in \mathbb{R}_+^1$ и $J_i(t, \varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ и всех $i \in M_0$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$.

6. Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum_{k, j \in N} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, zm(t))$ определены на

компакте $[T, +\infty]$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть уравнения (3) и (4) асимптотически эквивалентны по Брауэру, условие (5) имеет место равномерно относительно $0 < c < +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и $J_i(t, c)/\mu_i(t) \rightarrow 0$ равномерно по t при $c \rightarrow 0$, $\mu_i(t) \rightarrow 0$, $\forall t \in [T, +\infty)$, $\forall i \in M_0$. Тогда для того чтобы тривиальное решение уравнения (3) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по той же части переменных.

Доказательство теоремы вытекает из доказательства теоремы 5 [11].

Аналогичный подход применим для систем дифференциальных уравнений (модель Лотки – Вольтерра), описывающих динамику взаимодействующих сообществ [12]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - a_1 xy - \varpi_1 xz, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - a_2 xy - \frac{\varpi_2 yz}{m+y}, \\ \frac{dz}{dt} = b_1 \varpi_1 xz + b_2 \varpi_2 \frac{yz}{m+y} - cz. \end{cases} \quad (5)$$

где x, y, z – плотности популяций двух жертв и хищника, предполагается, что все параметры постоянны и неотрицательны; r и s – темпы роста двух видов жертв соответственно; K – емкость среды; L – нижняя критическая численность; c – скорость естественной гибели популяции хищников в единицу

времени в расчете на одного хищника в отсутствие жертв; a_1 и a_2 – эффективные коэффициенты популяционного роста численности двух видов жертв соответственно; ϖ_1, ϖ_2 – коэффициенты роста численности хищника за счет потребления жертв; b_1, b_2 – коэффициенты естественной смертности хищника, связанные с темпами роста популяции жертв.

2. Численные результаты

Для численной реализации выберем систему (1) с параметрами: $r = 2$, $K = 50$, $H = 10$, $p = 40$, $d = 3$, $k = 6$:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_1 \left(2 \left[1 - \frac{z_1}{50} \right] - \frac{z_2}{z_1 + 40} \right) - 10, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_2 \left[-3 + \frac{6z_1}{z_1 + 40} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Точка $(40; 12)$ – положение равновесия системы (6).

Сделаем замену переменных $z_1 = x_1 + 40$, $z_2 = x_2 + 12$ и перейдем к исследованию нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (x_1 + 40) \left(2 \left(1 - \frac{x_1 + 40}{50} \right) - \frac{x_2 + 12}{x_1 + 80} \right) - 10, \\ \frac{dx_2}{dt} = (x_2 + 12) \left(-3 + \frac{6(x_1 + 40)}{x_1 + 80} \right), \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 70 - \frac{(x_1 + 40)(x_1 + 40)}{50} - \frac{(x_1 + 40)(x_2 + 12)}{x_1 + 80}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_2 - 36 + \frac{6(x_1 + 40)(x_2 + 12)}{x_1 + 80}. \end{cases}$$

Соответствующая система первого линейного приближения имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -3y_2. \end{cases} \quad (8)$$

Фундаментальная матрица системы (8) и обратная к ней имеют вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{-3t} \end{pmatrix}; \quad Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0,5e^{-2s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}e^{3s} \end{pmatrix}.$$

Множество $N = \{1, 2\}$, $\bar{M}_0 = N$, тогда справедливы оценки компонент вектор-функций $f(t, x)$:

$$|f_1(t, x)| \leq \left| 70 - \frac{(x_1 + 40)(x_1 + 40)}{50} - \frac{(x_1 + 40)(x_2 + 12)}{x_1 + 80} \right| \leq 82 + |x_2| = \lambda_1(|x_2|)$$

при $40 < x_1 < 40 + 50\sqrt{3}$;

$$|f_2(t, x)| \leq \left| -36 + \frac{6(x_1 + 40)(x_2 + 12)}{x_1 + 80} \right| \leq |x_2|^2 = \lambda_2(|x_2|)$$

при $x_1 > 0$, $|x_2| \geq 3 + 3\sqrt{5}$, поэтому $M_0 = \{2\}$, $M = M_0$, $B = N - M = \{0\}$.

Эталонные функции сравнения имеют следующий вид:

$$\mu_1(t) = \max_{j \in N_0} \{|y_{11}(t), y_{12}(t)|\} = 2e^{2t}, \quad \mu_2(t) = \max_{j \in N_0} \{|y_{21}(t), y_{22}(t)|\} = 3e^{-3t};$$

$$m_1(t) = \max \left\{ \max_{j \in N_0} \{|y_{11}(t)|, |y_{12}(t)|, \mu_1(t)\} \right\} = 2e^{2t};$$

$$m_2(t) = \max \left\{ \max_{j \in N_0} \{|y_{21}(t)|, |y_{22}(t)|, \mu_2(t)\} \right\} = 3e^{-3t}.$$

Условие 5 выполняется, т.е.

$$\begin{aligned} |J_1(t, \Phi)| &= - \int_t^{+\infty} \left(|y_{11}y^{11}| |f_1| + |y_{12}y^{12}| |f_1| + |y_{11}y^{21}| |f_2| + |y_{12}y^{22}| |f_2| \right) ds = \\ &= e^{2t} \int_t^{+\infty} \left(82e^{-2s} + 3e^{-5s} \right) ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_2(t, \Phi)| &= - \int_t^{+\infty} \left(|y_{21}y^{12}| |f_1| + |y_{22}y^{12}| |f_1| + |y_{21}y^{21}| |f_2| + |y_{22}y^{22}| |f_2| \right) ds = \\ &= 9e^{-3t} \int_t^{+\infty} e^{-3s} ds. \end{aligned}$$

Условие 6 принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = 41e^{-2t} - 1, 5e^{-3t}, \quad z = 0, 5e^{-3t} - 20, 5e^{-2t}.$$

Следовательно, каждое решение системы (6) определено на множестве $[T, +\infty)$.

Таким образом, условия теоремы 1 выполняются, и, поскольку система уравнений (8) устойчива по переменной x_2 , тривиальное решение системы уравнений (7) обладает этим же свойством.

Для численной реализации системы дифференциальных уравнений (5) выберем следующие параметры:

$$r = 3,5; K = 150; a_1 = 0,3; w_1 = 0,24; s = 4,5; L = 150; a_2 = 0,273164;$$

$$w_2 = 0,21; m = 15; b_1 = 0,5; b_2 = 0,6; c = 1,7.$$

Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3,5x \left(1 - \frac{x}{150}\right) - 0,3xy - 0,24xz, \\ \frac{dy}{dt} = 4,5y \left(1 - \frac{y}{150}\right) - 0,21xy - \frac{0,21yz}{15+y}, \\ \frac{dz}{dt} = 0,5 \cdot 0,24xz + 0,6 \cdot 0,21 \frac{yz}{15+y} - 1,7z. \end{cases} \quad (9)$$

Точка (31,72; 42,89; 11,32) – положение равновесия системы. Проведя аналогичные исследования, получим, что условия теоремы 1 выполняются и так как система уравнений (9) не устойчива по переменным x_1, x_2, x_3 , то тривиальное решение соответствующей системы уравнений обладает этим же свойством по всем переменным.

Заключение

В работе рассмотрены модели взаимодействия сообществ типа «хищник-жертва». Приведены примеры численного исследования данного процесса с помощью метода сравнения Е. В. Воскресенского.

При выбранных параметрах численной реализации и определенного положения равновесия систем показана устойчивость и неустойчивость решений систем по всем и по части переменных, т.е. показана устойчивость и неустойчивость численности популяций.

Список литературы

1. **Руш, Н.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М. : Мир, 1980. – 304 с.
2. **Chakrabarti, C. G.** Non-equilibrium thermodynamics of ecosystems: Entropic analysis of stability and diversity / C. G. Chakrabarti, G. Koyel // Ecological Modeling. – 2009. – № 220. – P. 1950–1956.
3. **Свиричев, Ю. М.** Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свиричев, Д. О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
4. **Базыкин, А. Д.** Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – М. : Наука, 1985. – 182 с.
5. **Вольтерра, В.** Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1976. – 288 с.
6. **Ризниченко, Г. Ю.** Математические модели биологических продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 302 с.
7. **Свиричев, Ю. М.** Математические модели в экологии / Ю. М. Свиричев // Число и мысль. – Вып. 5. – М. : Знание, 1982. – С. 16–55.
8. **Бигон, М.** Экология. Особи, популяции и сообщества : в 2-х т. / М. Бигон, Дж. Харпер, К. Таунсенд. – М. : Мир, 1989. – Т. 1. – 668 с.
9. **Воскресенский, Е. В.** Асимптотические методы: Теория и приложения / Е. В. Воскресенский. – Саранск : Средневолжское математическое общество, 2001. – 300 с.

10. **Ruan, S.** On nonlinear dynamics of predator-prey models with discrete delay / S. Ruan // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – V. 4, № 2. – P. 140–188.
11. **Воскресенский, Е. В.** Асимптотические методы для части компонент решений дифференциальных уравнений / Е. В. Воскресенский, Т. Ф. Мамедова // Труды семинара по диф. уравнениям Мордов. ун-та. – Саранск, 1992. – С. 6–12.
12. **Мамедова, Т. Ф.** Об исследовании устойчивости модели вольтерровского типа / Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. – Пенза, 2011. – С. 44–46.

Мамедова Татьяна Фанатовна

кандидат физико-математических наук,
профессор, кафедра прикладной
математики, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: mamedovatf@yandex.ru

Mamedova Tatyana Fanatovna

Candidate of physical and mathematical
science, professor, sub-department
of applied mathematics, Mordovia State
University named after N. P. Ogarev
(Saransk)

Десяев Евгений Васильевич

ассистент, кафедра прикладной
математики, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: desyaev@rambler.ru

Desyaev Evgeny Vasilyevich

assistant, sub-department of applied
mathematics, Mordovian State University
after N. P. Ogarev (Saransk)

Ляпина Анна Александровна

аспирант, Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: lyapina@e-mordovia.ru

Lyapina Anna Alexandrovna

Postgraduate student, Mordovian State
University after N. P. Ogarev (Saransk)

УДК 517.9

Мамедова, Т. Ф.

Устойчивость математических моделей типа «хищник-жертва» / Т. Ф. Мамедова, Е. В. Десяев, А. А. Ляпина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 98–105.

РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТИ ОБРАЗЦА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ СОСТОЯНИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ПЕРЕХОД В КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Аннотация. Показано, что в приближении тонкого сверхпроводящего кольца его внутренняя (связанная с собственным объемом) индуктивность существенна по отношению к индуктивности, связанной с отверстием кольца. Учитывались три функциональные зависимости, описывающие затухание магнитного поля по мере его проникновения в объем сверхпроводящего кольца.

Ключевые слова: керамические высокотемпературные сверхпроводники, тонкое кольцо, критическое состояние, собственное магнитное поле, джозефсоновская глубина проникновения, самоиндукция сверхпроводящего кольца, поток магнитной индукции.

Abstract. The authors consider the fact that the internal inductance (volume-dependent) of a thin superconducting ring in approximation is significant compared to ring hole-dependent inductance. The researchers take into account three functional dependencies, describing magnetic field damping as it penetrates the volume of the superconducting ring.

Key words: ceramic HTSC, thin ring, critical state, self-magnetic field, Josephson penetration depth, superconducting ring inductance, magnetic flux.

Введение

Данная работа дополняет статью [1]. С помощью аппарата символьной математики Wolfram Mathematica 8 (WM8) рассчитывается возможное влияние потока собственного магнитного поля (внутренней индуктивности) через объем образца (сверхпроводящего кольца) на ход кривой (рис. 1), измеряемой в эксперименте работы [1]. Одним из следствий [1] является модель критического состояния керамического высокотемпературного сверхпроводящего (ВТСП) кольца, находящегося под непосредственным воздействием только собственного магнитного поля.

Одним из экспериментальных фактов, лежащих в основе модели критического состояния, является строгая линейность участка кривой 0–1 (рис. 1).

В условиях эксперимента [1] участок 0–1 может быть линейным только при постоянстве индуктивности (коэффициента самоиндукции) сверхпроводящего кольца на всем протяжении этого участка. В свою очередь это возможно только при том условии, что в момент его включения магнитное поле проникает в сверхпроводящее кольцо на определенную глубину и эта глубина не меняется на протяжении участка 0–1 (рис. 1).

Главным основным обоснованием вышесказанного является тот факт, что в условиях эксперимента [1] сверхпроводящий ток в кольце наводится индуктивно от вставленного в кольцо соленоида с током.

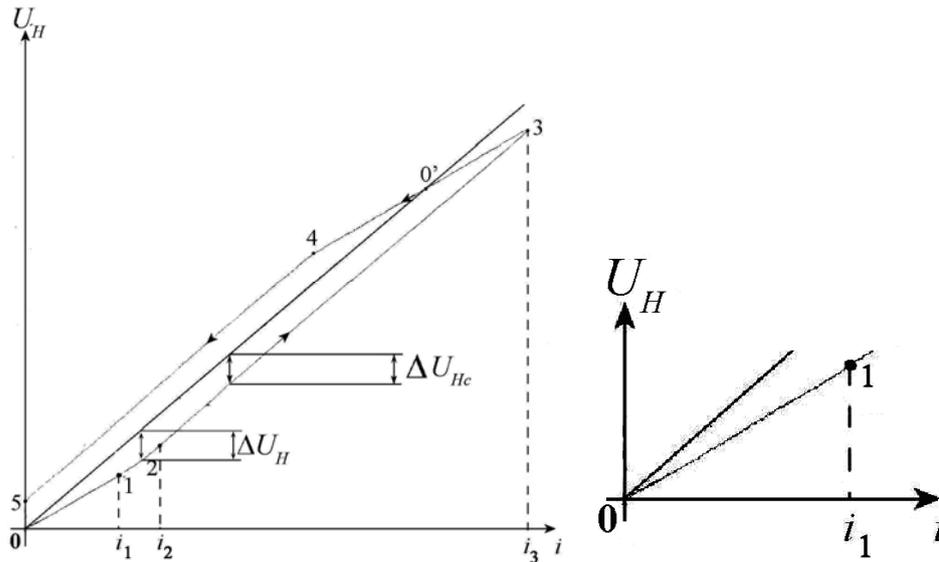


Рис. 1. Зависимость напряжения U_H на датчике Холла от тока соленоида i :

1 (i_1) – точка (соответствующий ток соленоида), в которой заканчивается первый линейный участок кривой 0–1; 2 (i_2) – точка (соответствующий ток соленоида), с которой начинается второй линейный участок 2–3; прямая 0–0' – зависимость $U_0(i)$ в отсутствие ВТСП кольца, ΔU_{Hc} – расстояние между прямыми 2–3 и $U_0(i)$ (см. [1])

Цель данной работы – показать, что даже в случае тонкого кольца значения внутренней индуктивности существенны по отношению к индуктивности, связанной с отверстием кольца. Расчет $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{L_2}{L_1}$ для различных зависимостей затухания магнитного поля в объеме кольца осуществлен аналитически с помощью WM8.

В условиях рассматриваемого эксперимента [1] и вследствие двухсвязности образца сверхпроводящий ток в нем наводится в результате эффекта самоиндукции. Основную роль при этом играет индуктивность сверхпроводящего кольца.

1. Численная модель кругового контура с током

1.1. Магнитное поле кругового контура с током

Z -составляющая магнитного поля, создаваемого тонким кольцом с током в точке (R, H, x) , найденного с помощью методов магнитостатики из закона Био – Савара – Лапласа (см., например, [2]), определяется выражением

$$B_{Z0}(R, H, x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 + Rx \sin(y)}{(R^2 + x^2 + 2Rx \sin(y) + H^2)^{3/2}} dy, \quad (1)$$

где H, R – координаты точки: H – расстояние от точки до плоскости кольца; R – расстояние от точки до оси кольца; x – радиус кольца. Размерный множитель перед интегралом принят равным 1, интегрирование осуществляется по угловой переменной y .

Решение интеграла (1) представляется соотношением

$$B_{Z0}(R, H, x) = -\frac{1}{(R^2 - 2Rx + x^2 + H^2)\sqrt{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}} \times$$

$$\times \left\{ (R^2 - x^2 + H^2) \cdot \text{EllipticE}\left(\frac{4Rx}{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}\right) - \right.$$

$$\left. - (R^2 - 2Rx + x^2 + H^2) \cdot \text{EllipticK}\left(\frac{4Rx}{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}\right) \right\}, \quad (2)$$

где EllipticK , EllipticE – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Зависимости $B_{Z0}(R, H, x)$ изображены на рис. 2 для различных значений H при $x = 3$.

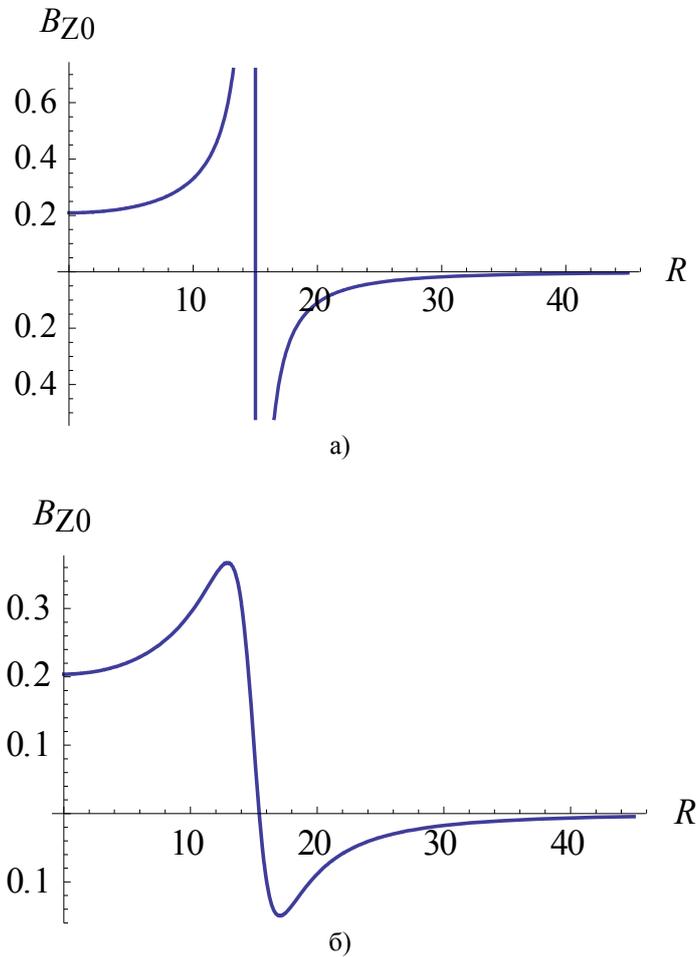


Рис. 2. B_{Z0} -компонента собственного магнитного поля тонкого кольца $B_Z(R, H, x)$: а – $H = 0$; б – $H = 2$; в – $H = 3$ (радиус кольца $x = 3$)

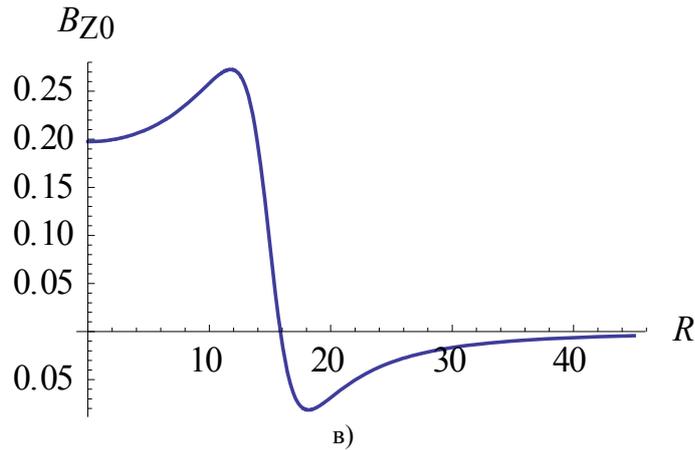


Рис. 2. Окончание

1.2. Затухание магнитного поля внутри кольца

В данной работе рассматривается настолько тонкое ВТСП кольцо, что для него несущественным является его профиль (форма поперечного сечения), и поэтому для проведения расчетов можно принять, что кольцо имеет круглую форму сечения. Реальные же, используемые в экспериментах ВТСП кольца производятся, как правило, методом осевого прессования и поэтому имеют сечения прямоугольной формы.

Для вычисления индуктивности в настоящей работе круглое кольцо можно заменить идеально тонким кольцом, для которого магнитное поле уже известно (см., например, [2], формулы (1), (2)). Проведенный расчет показывает, что зависимость, описывающая затухание магнитного поля в объеме кольца, сильно влияет на его индуктивность и может повлиять на ход кривой (рис. 1). Расчет индуктивностей производится для трех зависимостей, описывающих затухание магнитного поля внутри кольца:

1. Линейная зависимость:

$$B_{Z1} = B_{Z0} \cdot g_1(R), \quad g_1(R) = \frac{(x-R)}{d}. \quad (3)$$

2. Нелинейная зависимость:

$$B_{Z2} = B_{Z0} \cdot g_2(R), \quad g_2(R) = \frac{(x-R)^k}{d^k} \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (4)$$

3. Экспоненциальная зависимость:

$$B_{Z3} = B_{Z0} \cdot g_3(R), \quad g_3(R) = \frac{\exp(-k(R+d-x)) - \exp(-kd)}{1 - \exp(-kd)}. \quad (5)$$

В формулах (3)–(5) B_{Z0} – величина магнитного поля на внутренней поверхности кольца; g_1 , g_2 , g_3 – весовые функции, описывающие затухание; R – расстояние от оси кольца до точки; x – радиус центральной линии кольца; d – радиус поперечного сечения кольца; k – параметр затухания. Переменная R меняется в диапазоне от $x-d$ до x (рис. 3).

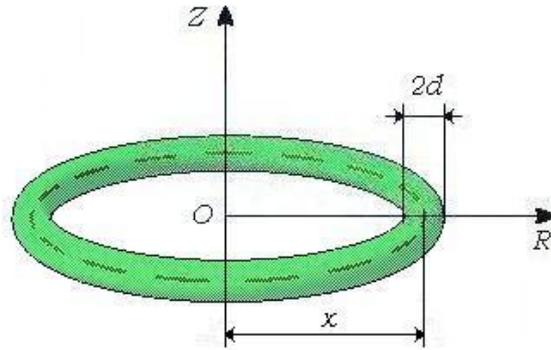


Рис. 3. Кольцо круглого сечения

На рис. 4 показаны зависимости весовых функций $g_1(R)$, $g_2(R)$, $g_3(R)$ для двух случаев: $k = 2$, $k = 10$ при $x = 3$, $d = 2$.

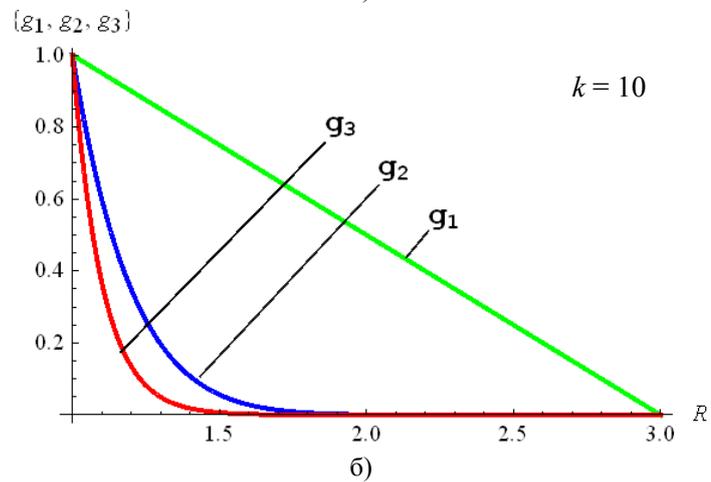
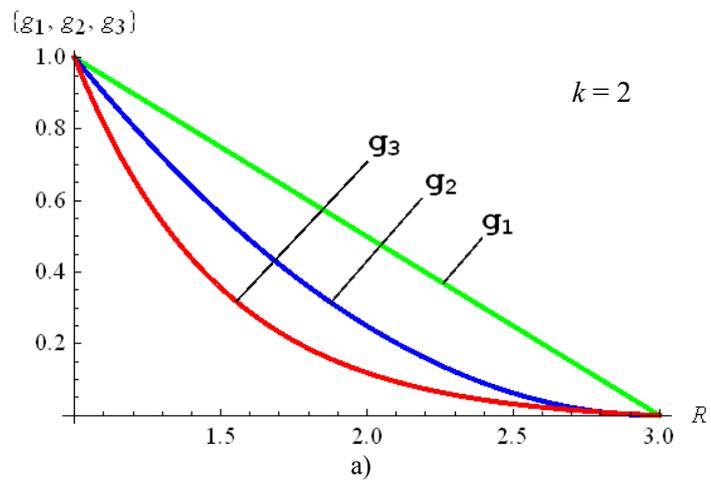


Рис. 4. Весовые функции для различных вариантов затухания: $g_1(R)$ – линейное, $g_2(R)$ – нелинейное, $g_3(R)$ – экспоненциальное; а – $k = 2$; б – $k = 10$. Линейной зависимости соответствует $k = 1$ (кривая $g_1(R)$). Радиус средней линии кольца $x = 3$, полуширина $d = 2$

2. Расчет индуктивностей сверхпроводящего кольца

Для расчета индуктивностей с помощью формул (1), (2) в аналитическом виде предполагается, что используемые кольца удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) кольцо имеет круглое сечение;
- 2) ток по сечению кольца распределен равномерно;
- 3) кольцо является тонким, т.е. $\frac{2d}{x} \leq 0,1$.

В данной работе все расчеты производятся с помощью символьной математики WM8. Достоинством WM8 является то, что в нем используются символьные алгоритмы, а не численные, такие как Maple, MathCAD и MatLab. При этом с результатом расчета можно осуществлять дальнейшие математические операции (дифференцирование, интегрирование и т.д.) аналитических зависимостей.

Полная индуктивность (и, соответственно, магнитный поток) сверхпроводящего кольца равна

$$L = L_1 + L_2,$$

где L_1 – индуктивность, связанная с отверстием кольца; L_2 – его собственная индуктивность.

Показано, что зависимость $\Phi_1(a)$ для предполагаемого сверхпроводящего кольца, где a – относительный поперечный размер кольца, $a = \frac{d}{x}$ ($d \ll x$), задается соотношением

$$\Phi_1(a) = \int_0^{x-d} B_{Z0}(R, 0, a) 2\pi R dR, \quad (6)$$

где $B_{Z0}(R, 0, a)$ – магнитное поле в отверстии кольца, определяется с помощью формулы (2) при $H = 0$.

Зависимость $\Phi_1(a)$ представлена на рис. 5 для $x = 15$.

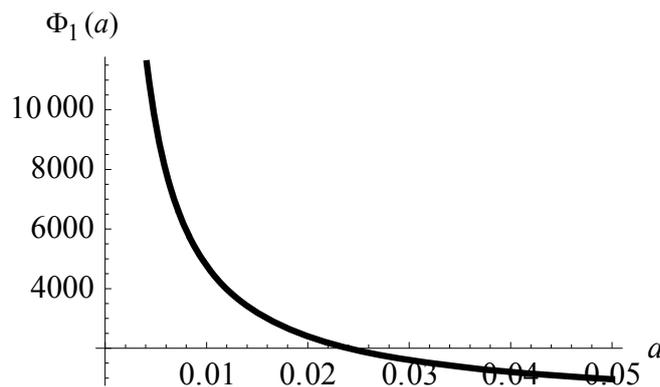


Рис. 5. Зависимость потока магнитной индукции, пронизывающий отверстие кольца

$\Phi_1(a)$; a – относительный поперечный размер кольца, $a = \frac{d}{x}$ (при $x = 15$)

Вследствие (3)–(5) магнитное поле в объеме кольца определяется соотношением

$$B_Z(R, 0, a) = B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g(R),$$

где $B_{Z0}(R = x - d, 0, a)$ – значение магнитного поля в плоскости кольца ($H = 0$) на внутренней поверхности кольца ($R = x - d$); $g(R)$ – весовая функция, определяющая магнитное поле внутри кольца (см. формулы (3)–(5));

$$B_{Z0}(R = x - d, 0, a) = \frac{1}{a(2-a) \cdot x} \times \left\{ (2-a) \cdot \text{EllipticE} \left(\frac{(4-4a)}{(2-a)^2} \right) + a \cdot \text{EllipticK} \left(\frac{(4-4a)}{(2-a)^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

Расчет потока через объем кольца $\Phi_2(a)$ для трех зависимостей затухания с помощью весовых функций (3)–(5) представляется формулой (8) и на рис. 6–8.

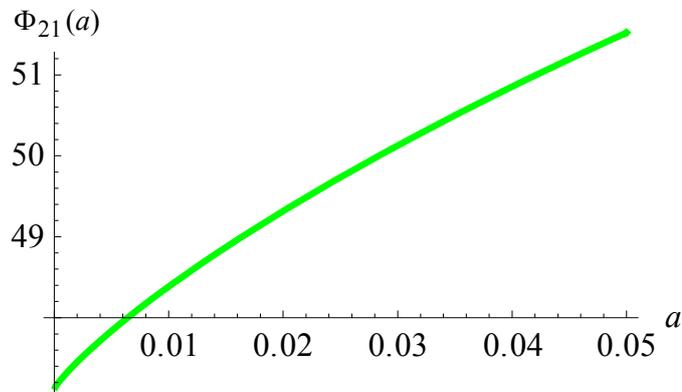


Рис. 6. График зависимости потока магнитной индукции через отверстие кольца $\Phi_{21}(a)$ при линейном распределении (3), $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца (при $x = 15$)

1. Для линейной зависимости (3):

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g_1(R) 2\pi R dR = \\ &= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot \frac{(x-R)}{d} 2\pi R dR. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Для нелинейной зависимости (4):

$$\Phi_{22} = \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g_2(R) 2\pi R dR =$$

$$= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot \frac{(x-R)^k}{d^k} 2\pi R dR. \quad (9)$$

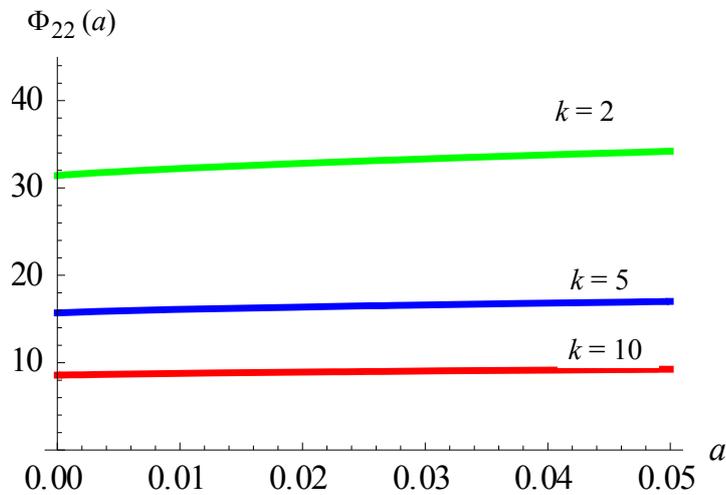


Рис. 7. Зависимость $\Phi_{22}(a)$ потока магнитной индукции через отверстие кольца при нелинейном распределении (4), $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца ($x = 15$, $k = 2, 5, 10$)

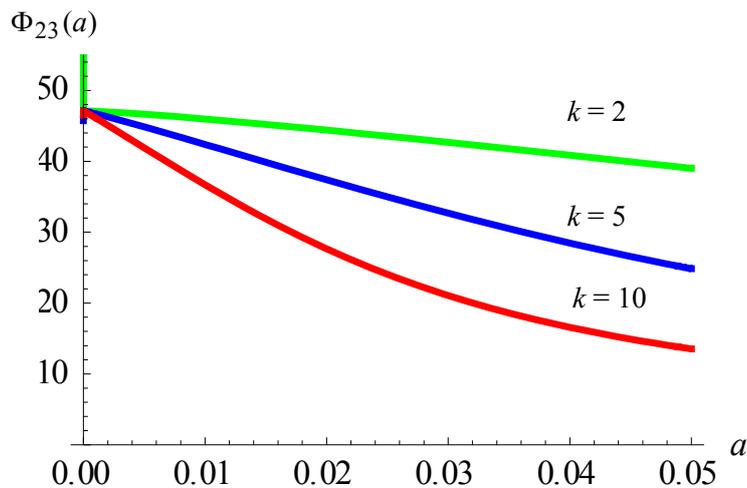


Рис. 8. Зависимость $\Phi_{23}(a)$ потока магнитной индукции через отверстие кольца при экспоненциальном распределении (5), где $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца ($x = 15$, $k = 2, 5, 10$)

3. Поток при экспоненциальном затухании (5):

$$\Phi_{23} = \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot g_3(R) 2\pi R dR =$$

$$= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot \frac{\exp(-k(R+d-x)) - \exp(-kd)}{1 - \exp(-kd)} 2\pi R d R. \quad (10)$$

Поток $\Phi_{22}(a)$ (рис. 7) представляет особый интерес. Для него зависимость от относительного поперечного размера кольца a при нелинейном затухании поля с различными k практически отсутствует. В то же время при экспоненциальном и линейном затухании $\Phi_{23}(a)$ (рис. 8) и $\Phi_{21}(a)$ (рис. 6) эта зависимость существует и имеет обратный характер. С увеличением a при линейном распределении поток $\Phi_{21}(a)$ (рис. 6) увеличивается, а при экспоненциальном распределении (рис. 8) – уменьшается.

3. Оценка относительной собственной индуктивности сверхпроводящего кольца

Вычисление относительных собственных индуктивностей сверхпроводящего кольца осуществляется посредством вычисления отношений потоков $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}$, где Φ_{21} , Φ_{22} , Φ_{23} – потоки магнитного поля через собственный объем кольца, Φ_1 – поток через отверстие кольца.

Эти отношения для коэффициентов затухания $k = 2$ и $k = 10$ представлены на рис. 9–12.

Из рис. 9 следует, что при линейном $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}$ и нелинейном $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}$ распределениях отношения потоков имеют линейную зависимость от поперечного размера a , в отличие от экспоненциального распределения.

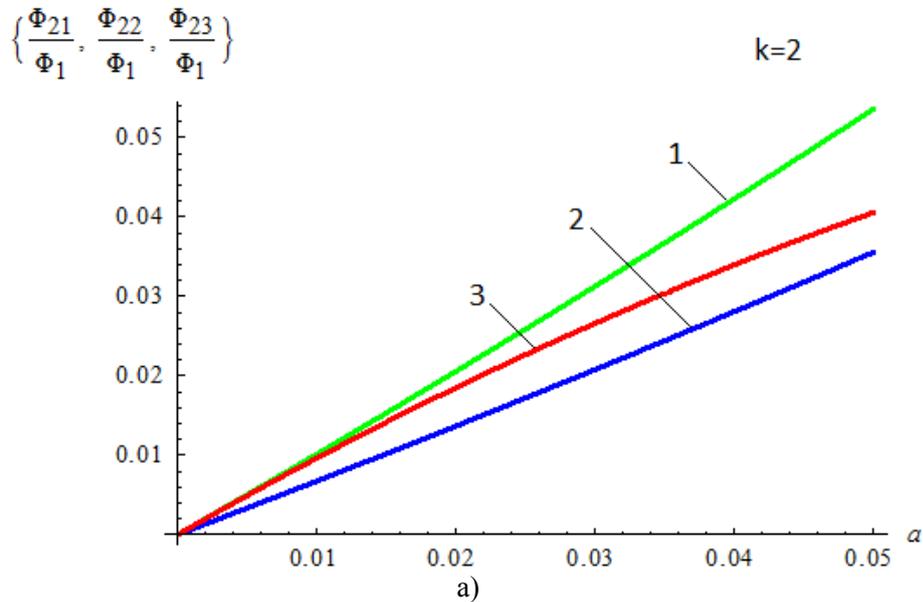


Рис. 9. Кривые отношений потоков:

$$1 - \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}, 2 - \frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}, 3 - \frac{\Phi_{23}}{\Phi_1} (x = 15)$$

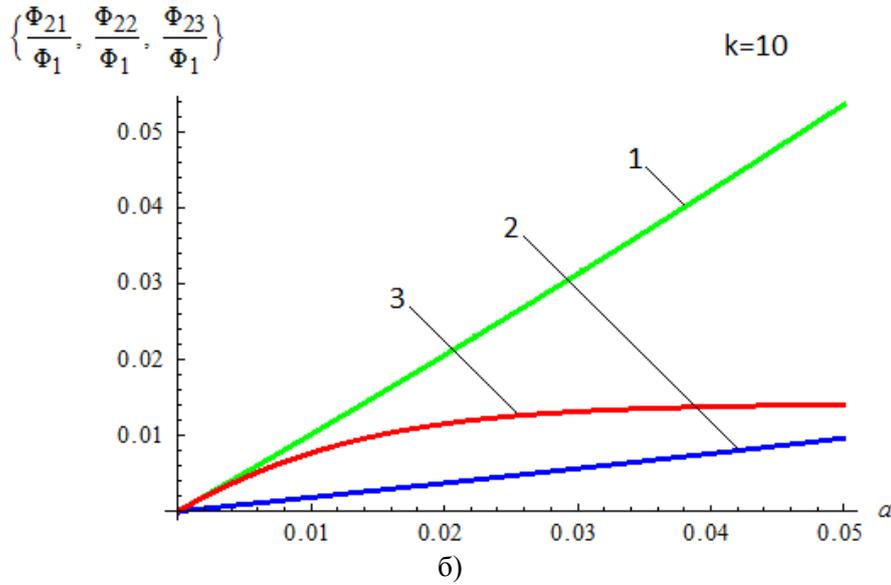


Рис. 9. Окончание

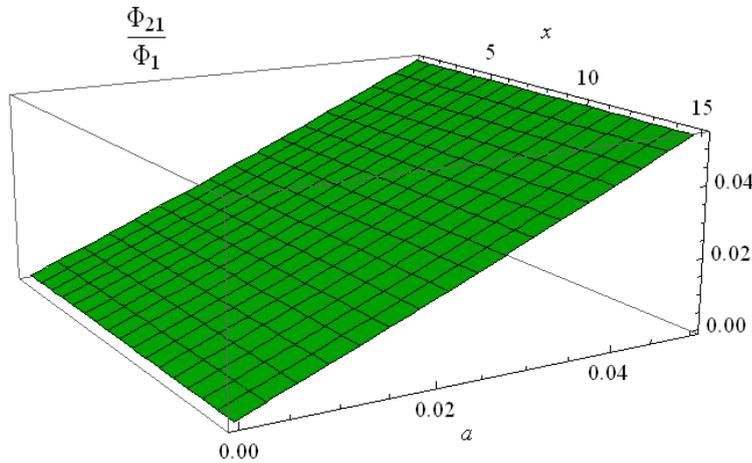


Рис. 10. Зависимость $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}(x, a)$

Также с увеличением поперечного размера кольца заметно возрастает отношение индуктивностей, из чего следует, что для колец реальных размеров это отношение окажется больше. Исходя из рис. 9, зная отношение потоков магнитной индукции $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ (индуктивностей), можно сказать о характере проникновения магнитного поля в объем сверхпроводящего кольца. Для большей наглядности зависимости, отображенные на рис. 8 и 9, показаны в 3D-представлении.

В результате расчетов при экспоненциальном распределении результат получился неожиданный. Оказалось, что отношение $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$ (рис. 12)

уменьшается с ростом радиуса x , т.е. оно зависит от размера кольца, в отличие от остальных распределений (рис. 10 и 11). Также значения при нелинейном $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}(x, a)$ и экспоненциальном $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$ распределениях убывают с ростом k .

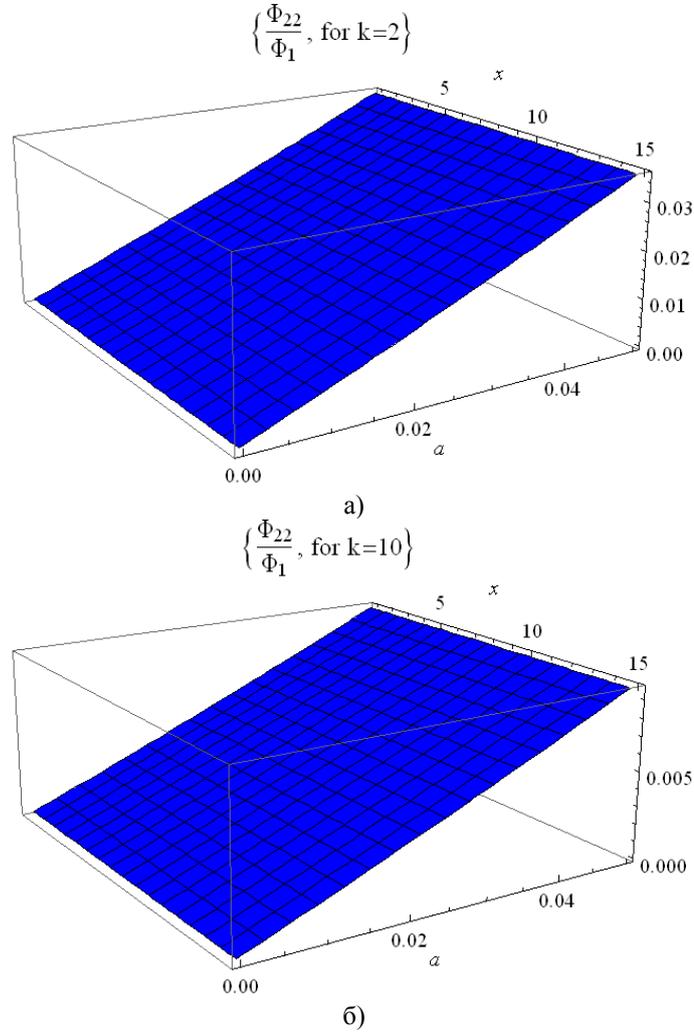


Рис. 11. Зависимость $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}(x, a)$

Вычисления индуктивностей (рис. 9–12) показывают, что изменения относительных индуктивностей в зависимости от условий по порядку величины могут достигать 10 %, т.е. заметно влиять на ход кривой $U_H(i)$ – зависимость напряжения от тока соленоида (рис. 1) [1].

Выводы

1. Подтвердились результаты работы [1]. Показано, что возможное изменение индуктивности сверхпроводящего кольца достаточно для того, что-

бы повлиять на линейность участка 0–1 экспериментальной кривой (рис. 1) (см. [1]).

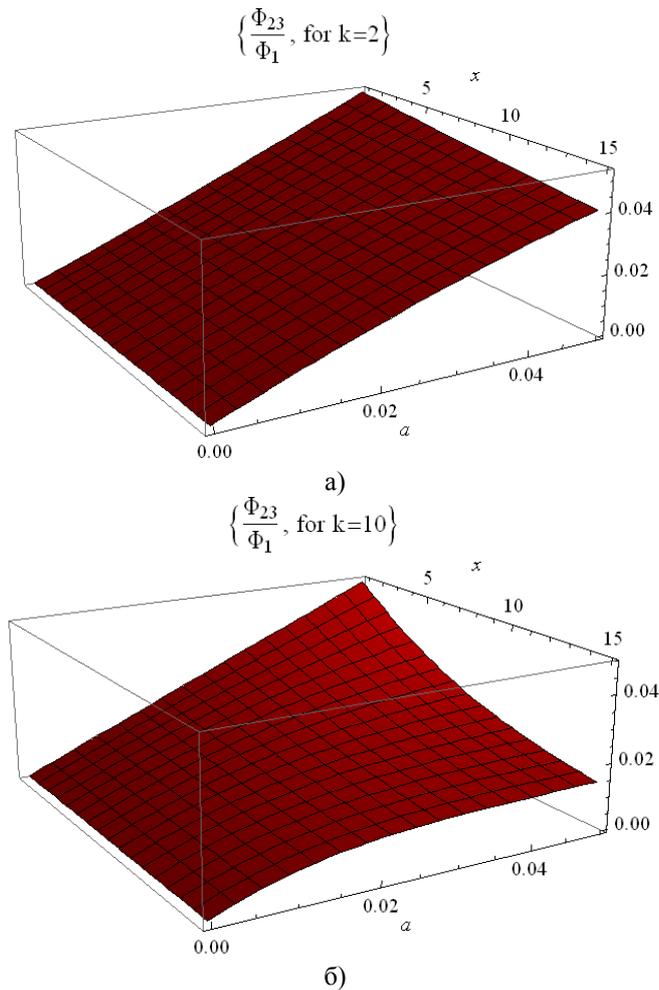


Рис. 12. Зависимость $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$

2. Относительная собственная индуктивность сверхпроводящего кольца существенно зависит от функции затухания магнитного поля в собственном объеме кольца. Из результатов эксперимента можно сделать выводы относительно функции затухания магнитного поля в образце. В статье [4] рассматриваются функции затухания внешнего магнитного поля. Отличительной особенностью данной работы является то, что сверхпроводящее кольцо взаимодействует только с собственным магнитным полем, и поэтому функции распределения относятся именно к данной особенности взаимодействия.

3. В данной работе рассматривается идеализированное тонкое кольцо с относительным диаметром $\frac{2d}{x} \leq 0,1$. Следовательно, чем толще кольцо (т.е. чем больше a), тем отношение индуктивностей значительно растет (до 6 % при $a = 5$ %). Для реальных колец, используемых в эксперименте

с относительным диаметром $\frac{2d}{x} \approx 0,1 - 0,5$, относительная собственная индуктивность увеличивается в несколько раз. При этом собственное магнитное поле кольца, а следовательно, и собственная индуктивность будут сильно зависеть от профиля кольца и распределения сверхпроводящего тока в нем. Результаты данной работы к подобным кольцам не применимы. Для таких колец необходимо вычисление тройных интегралов по объему кольца с учетом весовой функции с током. В данной работе интегрирование идет только по угловой переменной (см. формулу (1)). Расчеты реальных колец, очевидно, по своей сложности значительно превосходят расчеты данной работы. Поэтому представляется целесообразным и полезным произвести вычисления для реальных колец с применением WM8 и получением результатов в символьном, аналитическом виде.

Список литературы

1. **Суворова, Л. А.** Модель процесса перехода поликристаллического высокотемпературного сверхпроводника в критическое состояние / Л. А. Суворова, А. Р. Буев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 102–114.
2. **Матвеев, А. Н.** Электродинамика / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1980. – 383 с.
3. Пат. 2244317 Российская Федерация, МПК7 G01R031/00. Способ бесконтактного измерения тока ВТСП и устройство для его реализации / Буев А. Р. ; заявитель и патентообладатель Марийский гос. ун-т. – № 200213236/28 ; заявл. 02.12.2002; опубл. 2005, БИ № 1.
4. **Белодедов, М. В.** О проникновении магнитного поля в гранулированный сверхпроводник / М. В. Белодедов, С. В. Черных // Журнал технической физики. – 2003. – Т. 73, № 2. – С. 75–80.

Суворова Людмила Алексеевна
аспирант, Марийский государственный
университет (г. Йошкар-Ола)

E-mail: suv87L@mail.ru

Suvorova Lyudmila Alekseevna
Postgraduate student,
Mari State University (Yoshkar-Ola)

Буев Андрей Романович
доктор технических наук, профессор,
кафедра теоретической и прикладной
физики, Марийский государственный
университет (г. Йошкар-Ола)

E-mail: suv87L@mail.ru

Buev Andrey Romanovich
Doctor of engineering sciences, professor,
sub-department of theoretical and applied
physics, Mari State University
(Yoshkar-Ola)

УДК 538.945

Суворова, Л. А.

Расчет индуктивности образца в сверхпроводящем состоянии и ее влияние на переход в критическое состояние / Л. А. Суворова, А. Р. Буев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 106–118.

В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов,
Р. В. Зайцев, С. Е. Козенко, М. А. Манухина

ВЛИЯНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ НА ТУННЕЛЬНЫЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ¹

Аннотация. Рассматривается модель 1D-диссипативного туннелирования для структур из квантовых точек в системе совмещенного АСМ/СТМ в условиях внешнего электрического поля. Найдено, что влияние локальной моды матрицы среды термостата на вероятность 1D-диссипативного туннелирования приводит к появлению двух пиков в соответствующей полевой зависимости; один из которых для случая симметричного двухъямного осцилляторного потенциала оказывается неустойчивым, а второй (дополнительный) – устойчивым. Полученная теоретическая зависимость качественно согласуется с экспериментальной вольт-амперной характеристикой контакта АСМ зонда к поверхности квантовой точки из InAs.

Ключевые слова: диссипативное туннелирование, квантовые точки, диэлектрическая матрица.

Abstract. The article considers a 1D-dissipative tunneling model for structures with quantum dots in system of joint AFM/STM in external electric field. It is revealed, that the influence of a local mode of a heat-bath on the 1D-dissipative tunnel probability leads to occurrence of two peaks in corresponding dependence from intensity of electric field; one of this peaks is unstable (for case of symmetric double – well oscillator potential), and another additional peak is a stable one. Obtained theoretical dependence qualitatively corresponds to experimental VAC for the AFM cantilever contact to surface of QD from InAs.

Key words: dissipative tunneling, quantum dot, dielectric matrix.

Введение

Квантовые эффекты в мезоскопических системах, включая управляемое диссипативное туннелирование, привлекают все более широкий круг исследователей и специалистов от физики низкоразмерных систем до квантовой химии и биологии [1–10]. Квантовое туннелирование с диссипацией относится к одному из приоритетных направлений современной квантовой мезоскопии (о важности этого направления для современной теоретической физики упоминает в курсе своих лекций профессор М. В. Фейгельман (Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау). Вопрос о том, как от квантовомеханического описания микроскопической системы (например, молекулы) последовательно перейти к классическому описанию большой системы, – оживленно обсуждался с самого начала создания квантовой механики. Однако лишь в 1970–80-х гг. была развита (в работах Иорданского – Финкельштейна, Калдейры – Легетта, Ларкина – Овчинникова) конструктивная теория

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-97002) и Фонда фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства науки Республики Казахстан (грант 1253/ГФ).

взаимодействия квантовомеханической системы с внешним «резервуаром», и показано, как в рамках квантово-механического описания возникает аналог «силы трения» и каким образом квантовое туннелирование подавляется, а затем полностью исчезает при достаточно большом «коэффициенте трения». В дальнейшем это направление исследований получило очень широкое развитие в различных областях физики конденсированного состояния и за ее пределами.

К числу проблем, решаемых в рамках этой теории, можно отнести следующие: квантовый распад метастабильного состояния, туннелирование дислокации в квантовом кристалле и разрыв атомной цепочки, распад «неустойчивого вакуума», проблема многочастичной локализации и статистика уровней и многие другие проблемы. Изучение управляемости квантовых эффектов, связанных с диссипативной туннельной динамикой в низкоразмерных системах различной природы, является актуальной проблемой современной физики конденсированного состояния. В последние годы активизировались исследования управляемых туннельных эффектов в системах полупроводниковых квантовых точек (КТ), квантовых молекул (КМ) и взаимодействующих КМ, а также в экспериментах с СТМ/АСМ при исследовании параметров низкоразмерных структур из металлических КТ. Исследована термо- и электроуправляемость и особенности диссипативного туннельного переноса в 1D- и 2D-симметричных и асимметричных системах с полупроводниковыми квантовыми точками и квантовыми молекулами.

Целью настоящей работы было исследование устойчивости эффектов 1D-диссипативного туннельного переноса в системе с квантовыми точками при конечной температуре в условиях внешнего электрического поля. В данной работе рассматривается модель 1D-диссипативного туннелирования с учетом влияния прототирующей фононной моды матрицы среды термостата для процесса туннелирования через структуру единичных квантовых точек в системе совмещенного АСМ/СТМ. Проводится качественное сравнение теоретической кривой вероятности 1D-туннелирования с вольт-амперной характеристикой (ВАХ) контакта АСМ зонда к поверхности КТ из InAs (совместная работа «Визуализация локальной плотности состояний в квантовых точках InAs/GaAs методом комбинированной АСМ/СТМ» – П. А. Бородин, А. А. Бухарев (Казанский физико-технический институт КИЦ РАН), Д. О. Филатов, Д. А. Воронцов и др. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского)).

1D-диссипативное туннелирование во внешнем электрическом поле. Роль среды-термостата

Рассмотрим влияние электрического поля на двухъямный модельный осцилляторный 1D-потенциал (рис. 1).

Учет влияния электрического поля на симметричный двухъямный модельный осцилляторный потенциал можно представить в виде

$$U(q) = \frac{\omega_0^2}{2}(q-a)^2\theta(q) + \frac{\omega_0^2}{2}(q+a)^2\theta(-q) - |e|Eq. \quad (1)$$

Электрическое поле меняет симметрию потенциала, и происходит сдвигка минимумов:

$$1) q > 0; U_1 = \frac{\omega_0^2}{2}(q-a)^2 - |e|Eq = \frac{\omega_0^2}{2}(q-a^*)^2 - a|e|Eq - \frac{|e|E}{2\omega_0^2},$$

где $a^* = a + \frac{|e|E}{\omega_0^2}$;

$$2) q < 0; U_2 = \frac{\omega_0^2}{2}(q+a)^2 - |e|Eq = \frac{\omega_0^2}{2}(q+a^{**})^2 + a|e|Eq - \frac{|e|E}{2\omega_0^2},$$

где $a^{**} = a - \frac{|e|E}{\omega_0^2}$.

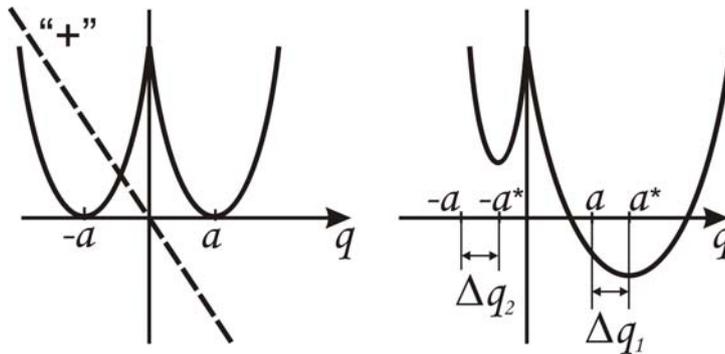


Рис. 1. Влияние электрического поля на симметричный двухъямный осцилляторный потенциал

Тогда перенормированный потенциал приобретает вид

$$U = \left[\frac{\omega_0^2}{2}(q-a^*)^2 - a|e|Eq \right] \theta(q) + \left[\frac{\omega_0^2}{2}(q+a^{**})^2 + a|e|Eq \right] \theta(-q). \quad (2)$$

Величины смещенных минимумов (рис. 1) равны

$$U_1(a^*) = -a|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2}, \quad U_2(-a^{**}) = a|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2},$$

а смещение минимумов оказывается пропорциональным полю:

$$|\Delta U| = U_2 - U_1 = 2a|e|E \Rightarrow |\Delta U| \sim E. \quad (3)$$

При этом смещения минимумов оказываются одинаковыми по величине:

$$\Delta q_1 = a^* - a = \frac{|e|E}{\omega_0^2}, \quad \Delta q_2 = -a^{**} + a = \frac{|e|E}{\omega_0^2}.$$

В рассматриваемой модели вершина потенциального барьера фиксируется:

$$U(0) = \frac{\omega_0^2 a^2}{2},$$

но происходит соответствующая сдвигка величины левого минимума, и, как следствие, эффективно уменьшается барьер:

$$\Delta U_2 = U(0) - U_2(-a^{**}) = \frac{\omega_0^2 a^2}{2} - a|e|E + \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} = \frac{|e|^2}{2\omega_0^2} \left(E - \frac{a}{|e|} \omega_0^2 \right)^2. \quad (4)$$

Так как при последующем рассмотрении предполагается использование квазиклассического инстантонного приближения при вычислении вероятности туннелирования в двухъямном осцилляторном потенциале, то будем считать, что величина барьера не может быть слишком малой по сравнению с длиной подбарьерного переноса, следовательно, возникает естественное ограничение на величину напряженности электрического поля:

$$E \ll \frac{a}{|e|} \omega_0^2 \Rightarrow E \ll \frac{ma\omega_0^2}{|e|}. \quad (5)$$

В случае, когда исходный потенциал оказывается асимметричным, ситуация аналогична с поправкой на параметр исходной асимметрии (рис. 2).

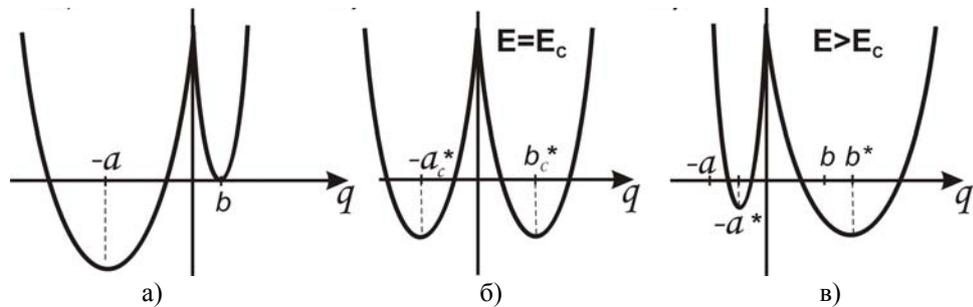


Рис. 2. Влияние электрического поля на асимметричный двухъямный осцилляторный потенциал

При некотором значении внешнего поля первоначально асимметричный потенциал с более глубокой левой ямой может стать симметричным $a_c^* = b_c^*$:

$$\tilde{U}_1(b^*) = \tilde{U}_2(a^*); -b|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} = a|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2}(a^2 - b^2),$$

отсюда

$$E|e|(a+b) = \frac{\omega_0^2}{2}(a-b)(a+b) \text{ и } E_c = (a-b) \frac{\omega_0^2}{2|e|}. \quad (6)$$

Для того чтобы воспользоваться стандартной моделью для определения вероятности диссипативного туннелирования, будем использовать следующие обозначения для перенормированного двухъямного осцилляторного потенциала во внешнем электрическом поле: $q_1 = b^* = b + \frac{|e|E}{\omega_0^2}$, $q_0 = a^* = a - \frac{|e|E}{\omega_0^2}$. То-

гда модельный перенормированный $1D$ -потенциал можно представить в стандартном виде. С учетом результатов, полученных ранее в [8–10], модельный гамильтониан системы может быть записан как

$$\hat{H} = \frac{p_1^2}{2} + v_1(y_1) + y_1 \sum_{\alpha=2}^N C_{\alpha} y_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^N (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 y_{\alpha}^2), \quad (7)$$

где

$$v_1(y_1) = \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 + \lambda y_1 \right) \theta \left(-\frac{\Delta I}{2\lambda} - y_1 \right) + \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 - \lambda y_1 - \Delta I \right) \theta \left(\frac{\Delta I}{2\lambda} + y_1 \right). \quad (8)$$

Вероятность туннелирования частицы в единицу времени может быть найдена в квазиклассическом приближении. Необходимо, чтобы дебройлевская длина волны частицы была много меньше характерного линейного масштаба потенциала. Для этого вполне достаточно, чтобы высота барьера была много больше энергии нулевых колебаний в яме начального состояния. Кроме квазиклассического приближения, мы должны предположить квазистационарность распада, т.е. ширина уровня Γ , с которого туннелирует частица, должна быть много меньше энергии нулевых колебаний.

Находим $1D$ -квазиклассическое действие в одноинстантонном приближении с учетом влияния матрицы среды-термостата:

$$S_B = 2\omega_0^2 (q_0 + q_1) q_0 \tau_0 - \frac{2\omega_0^2 (q_0 + q_1)^2 \tau_0^2}{\beta} - \frac{4\omega_0^4 (q_0 + q_1)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2 (v_n^2 + \omega_0^2 + \zeta_n)}. \quad (9)$$

Предэкспоненциальный множитель определяется вкладом траекторий, близко расположенных от инстантона. Для этого мы должны разложить действие до квадратичного члена по отклонениям $q - q_B$ и проинтегрировать в функциональном пространстве. Тогда вероятность туннелирования в единицу времени можно записать как

$$\Gamma = B \exp(-S_B); \quad (10)$$

$$B = \left[\frac{S_0}{2\pi} \frac{\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=-q_0}}{\det' \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=q_B(\tau)}} \right]^{1/2}; \quad (11)$$

$$S_0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \dot{q}_B^2(\tau) d\tau, \quad (12)$$

а \det' означает, что нулевое собственное значение, соответствующее нулевой моде инстантона, опущено.

Отметим, что вывод этой формулы предполагает приближение идеального инстантонного газа

$$\Gamma \ll (\Delta\tau)^{-1}, \quad (13)$$

где $\Delta\tau$ – ширина перехода от положительного значения траектории к отрицательному.

Вычисление предэкспоненциального множителя в рассматриваемой модели приводит к следующему результату:

$$B = \frac{2\omega_0^2 (q_0 + q_1)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right)^{-1/2}. \quad (14)$$

Рассмотрим (9) с учетом взаимодействия с одной локальной фононной моды (ω_L). Для упрощения будем предполагать это взаимодействие доста-

точно малым, т.е. $\frac{C}{\omega_0^2} \ll 1$ и $\frac{C}{\omega_L^2} \ll 1$. В этом случае $D(v_n) = -\frac{C^2}{v_n^2 + \omega_L^2}$

(где $v_n = \frac{2\pi n}{\beta}$) и $\zeta_n = \frac{C^2 v_n^2}{\omega_L^2 (\omega_L^2 + v_n^2)}$.

Тогда можно получить выражение для квазиклассического действия с учетом локальной моды среды-термостата в приведенных обезразмеренных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{S}{a^2\omega} = & \frac{1}{2}(b^*+1)(3-b^*)\tau_0^* - \frac{(b^*+1)^2(\tau_0^*)^2}{2\beta^*} - \frac{(b^*+1)^2}{2\tilde{\gamma}'} \left\{ \frac{(1-\tilde{x}'_2)}{\sqrt{\tilde{x}'_1}} \left[\text{cth}\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1} - \right. \right. \\ & - \frac{1}{\text{sh}\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1}} \left\{ \text{ch}\left((\beta^* - \tau_0^*)\sqrt{\tilde{x}'_1}\right) - \text{ch}\left(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1}\right) \right\} + \text{ch}\left((\beta^* - \tau_0^*)\sqrt{\tilde{x}'_1}\right) \left. \right] - \\ & - \frac{(1-\tilde{x}'_1)}{\sqrt{\tilde{x}'_2}} \left[\text{cth}\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2} - \frac{1}{\text{sh}\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left\{ \text{ch}\left((\beta^* - \tau_0^*)\sqrt{\tilde{x}'_2}\right) - \text{ch}\left(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2}\right) \right\} + \text{ch}\left((\beta^* - \tau_0^*)\sqrt{\tilde{x}'_2}\right) \right] \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\tau_0^* = 2\omega\tau = \text{arcsch}\left[\frac{1-b^*}{1+b^*}\text{sh}\beta^*\right] + \beta^*$, $\beta^* = \frac{\beta\omega}{2}$; $b^* = \frac{q_1}{q_0}$ – перенормированный параметр асимметрии.

Кроме того, влияние локальной моды среды-термостата учитывается через следующие параметры:

$$\tilde{\gamma}' = \frac{\tilde{\gamma}}{\omega^2} = \sqrt{\left[\frac{\omega_L^2}{\omega^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega^2} \right]^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{\omega^2}} = \sqrt{[\omega_L^* + 1 + C^*]^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{\omega^2}},$$

$$\tilde{x}_{1,2}' = \frac{\tilde{x}_{1,2}}{\omega_0^2} = \frac{\gamma_{1,2}}{\omega_0^2},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2}\right) - \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2}\right)^2 - 4\omega_0^2\omega_L^2}}{2} > 0,$$

$$\gamma_2 = \frac{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2}\right) + \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2}\right)^2 - 4\omega_0^2\omega_L^2}}{2} > 0.$$

Для расчета предэкспоненциального фактора с учетом влияния локальной моды среды-термостата ω_L используем полученное ранее общее выражение (14). При этом, как и в случае вычисления квазиклассического инстантонного (евклидового) действия с учетом локальной моды ω_L , мы используем соотношение

$$D(v_n) = - \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_\alpha^2}{\omega_\alpha^2 + v_n^2} \Big|_{\omega_L} \rightarrow - \frac{C^2}{\omega_L^2 + v_n^2} = - \frac{C^2}{\omega_L^2} + \xi_n,$$

где

$$\xi_n = \frac{C^2}{\omega_L^2} - \frac{C^2}{\omega_L^2 + v_n^2}; \quad v_n = \frac{2\pi n}{\beta}; \quad \beta = \frac{\hbar}{kT}, \quad \lambda_{0n} = v_n^2 + \omega_0^2 + \xi_n.$$

Тогда для вычисления предэкспоненциального фактора мы учтем, что в общем выражении для B (14)

$$B = \frac{2\omega_0^2(a+b)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \cdot \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}}}{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right]^{1/2}}$$

происходит следующее преобразование выражений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} - \frac{C^2}{\omega_L^2 + v_n^2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1/2(1 - \cos 2v_n \tau_0)}{v_n^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} - \frac{C^2}{\omega_L^2 + v_n^2}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(v_n^2 + \omega_L^2)(1 - \cos 2v_n \tau_0)}{v_n^2(v_n^2 + \omega_L^2) + \omega_0^2(v_n^2 + \omega_L^2) + \frac{C^2}{\omega_L^2}(v_n^2 + \omega_L^2) - C^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha + \omega_L^2)(1 - \cos 2v_n \tau_0)}{\alpha^2 + \alpha \left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) + \omega_0^2 \omega_L^2} = \frac{(\alpha + \omega_L^2)(1 - \cos 2v_n \tau_0)}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)},$$

где

$$\alpha = v_n^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{-\left(\omega_0^2 + \omega_L^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 + \omega_L^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega_0^2 \omega_L^2}}{2}.$$

Выражение в знаменателе (14) преобразуется к виду

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{v_n^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} - \frac{C^2}{\omega_L^2 + v_n^2}} \right]^{1/2}; \quad v_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad \alpha = v_n^2;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0 (v_n^2 + \omega_L^2)}{\alpha(\alpha + \omega_L^2) + \omega_0^2(\alpha + \omega_L^2) + \frac{C^2}{\omega_L^2}(\alpha + \omega_L^2) - C^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{4\pi\tau_0}{\beta} n(\alpha + \omega_L^2)}{\alpha^2 + \alpha \left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) + \omega_0^2 \omega_L^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{4\pi\tau_0}{\beta} n(\alpha + \omega_L^2)}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)},$$

где $\alpha_{1,2}$ определены выше.

Вводя, как и в случае вычисления, действия с учетом локальной моды среды-термостата коэффициенты:

$$\gamma_1 = -\alpha_1 = \frac{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) - \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega_0^2 \omega_L^2}}{2} > 0,$$

$$\gamma_2 = -\alpha_2 = \frac{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) + \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega_0^2 \omega_L^2}}{2} > 0,$$

а также учитывая, что

$$\frac{\alpha + \omega_L^2}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{v_n^2 - \alpha_1} + \frac{D}{v_n^2 - \alpha_2} \right),$$

где

$$A = -\frac{(\omega_L^2 + \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = -\frac{(\omega_L^2 - \gamma_1)}{\gamma_1 - \gamma_2}; \quad D = \frac{\omega_L^2 + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\omega_L^2 - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

получаем окончательное аналитическое выражение для предэкспоненты с учетом влияния локальной моды среды-термостата:

$$\tilde{B}^* = \frac{2\omega_0^2(a+b)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \times \left\{ \frac{A}{2\gamma_1} \left[\sqrt{\gamma_1} \beta \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2} \right) - 1 \right] + \frac{D}{2\gamma_2} \left[\sqrt{\gamma_2} \beta \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2} \right) - 1 \right] \right. \\ \left. + \left\{ \frac{A}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_1} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_1} \right] + \frac{D}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_2} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \right\}^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left[\sqrt{\gamma_1} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2}} \right) + \frac{D}{2} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left[\sqrt{\gamma_2} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2}} \right) \right\}^{1/2} \right\}.$$

Для последующих численных оценок используем введение безразмерных параметров $\omega_L^* = \left(\frac{\omega_L}{\omega_0} \right)^2$, $C^* = \left(\frac{C}{\omega_L \omega_0} \right)^2$:

$$\gamma_{1,2} = \omega_0^2 \left[\frac{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right)^2 - \frac{4\omega_L^2}{\omega_0^2}}}{2} \right] = \\ = \omega_0^2 \left[\frac{(\omega_L^* + 1 + C^*) \mp \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*}}{2} \right];$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma_{1,2}} &= \omega_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} + 1\right) \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} + 1\right)^2 - \frac{4\omega_L^2}{\omega_0^2}}}{2}} = \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{(\omega_L^* + 1 + C^*) \mp \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*}}{2}}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(\omega_L^2 - \gamma_1)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} \left[(\omega_L^* + 1 + C^*) - \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*} \right]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*}}, \\ D &= \frac{(\omega_L^2 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} \left[(\omega_L^* + 1 + C^*) + \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*} \right]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*)^2 - 4\omega_L^*}}. \end{aligned}$$

Как и ранее,

$$\tau^* = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{1}{2\omega} \tau_0 = \frac{1}{2\omega} \left[\operatorname{arcsch} \left[\frac{1-b^*}{1+b^*} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \right] + \frac{\beta}{4} \right].$$

Условие (13), ограничивающее применимость рассматриваемого приближения, для исследования туннелирования в полупроводниковых квантовых точках дает следующие оценки. Применимость квазиклассического инстантонного приближения при исследовании температурной зависимости вероятности туннелирования Γ для КТ на основе InSb может быть оценена в квазиклассическом приближении из сравнения характерного размера системы с длиной волны де Бройля туннелирующей частицы или в рамках приближения разреженного газа пар «инстантон – антиинстантон»:

$$\begin{cases} R \gg \frac{\hbar}{(2 - \sqrt{3})\sqrt{2m^*U_0}}, \\ R \gg \frac{\hbar}{\sqrt{8m^*k_B T}}, \end{cases}$$

где U_0 – высота барьера; m^* – эффективная масса туннелирующего электрона.

В первом неравенстве сравнивается радиус КТ R с длиной волны де Бройля туннелирующей частицы; вторая формула демонстрирует применимость приближения разреженного газа пар «инстантон – антиинстантон». Оба неравенства выполняются одновременно при $T \geq 50 \text{ K}$ и $U_0 \approx 0,2 \text{ эВ}$, что может соответствовать КТ на основе InSb. Как было показано в работе [11], может происходить подавление кулоновских эффектов, если стартовая энергия частицы в КТ существенно превышает энергию кулоновского отталкивания: $U_0 \gg \frac{e^2}{q_0 + q_1}$. Дополняя это условие ограничением по величине

напряженности электрического поля $E \ll \frac{U_0}{|e|(q_0 + q_1)}$ для КТ из InSb, можем

получить следующее значение напряженности: $E \ll 3 \cdot 10^6$ В/м.

В следующем параграфе полученные аналитические результаты будут использованы для проведения численных оценок и качественного сравнения с существующими экспериментами.

Эффекты управляемости 1D-диссипативного туннельного переноса. Качественное сравнение с экспериментом

Проведенный аналитический расчет позволяет также учесть роль влияния локальной моды среды-термостата на зависимость $\Gamma = B \exp(-S)$. Так, например, для предэкспоненциального фактора с учетом влияния локальной моды среды-термостата можно получить зависимости, качественно напоминающие результаты расчетов для случая без учета локальной моды (рис. 3). Отличия возникают в характере роста соответствующих кривых при больших значениях параметра асимметрии (т.е. с ростом приложенного напряжения или электрического поля) (рис. 4–6). Зависимости инстантонного действия $S(b)$ и $\exp\{-S(b)\}$ представлены на рис. 4.

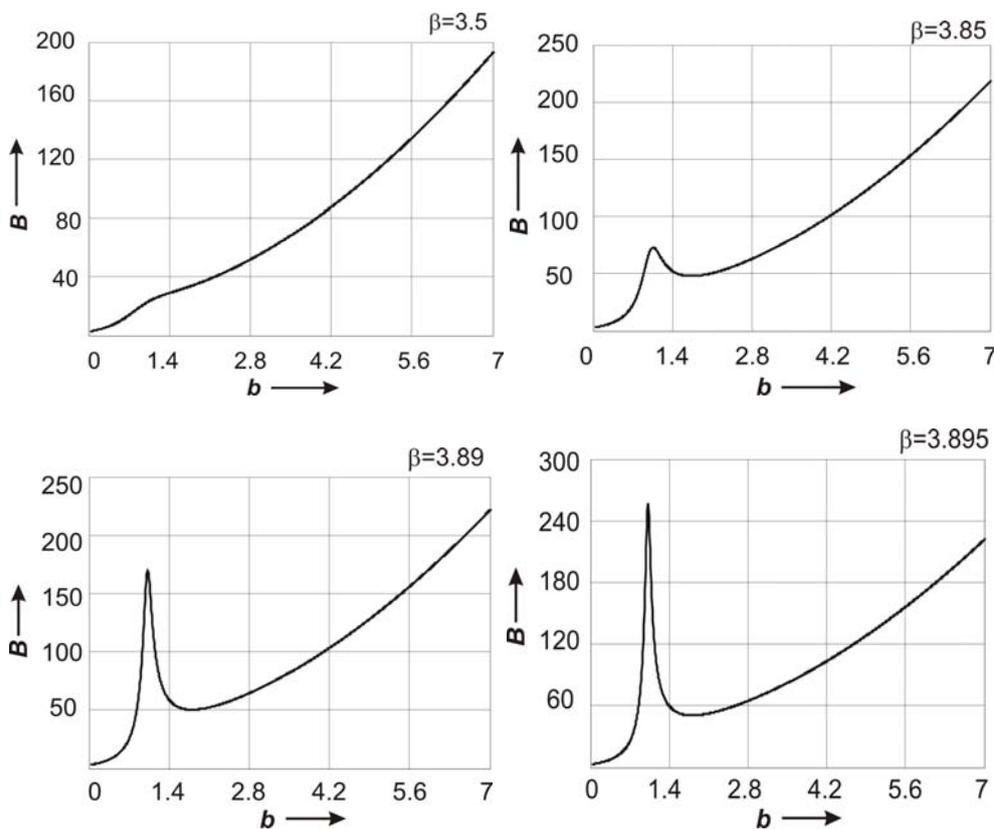


Рис. 3. Зависимость предэкспоненциального фактора B от параметра асимметрии при различных значениях обратной температуры β^* и с учетом влияния локальной моды среды-термостата

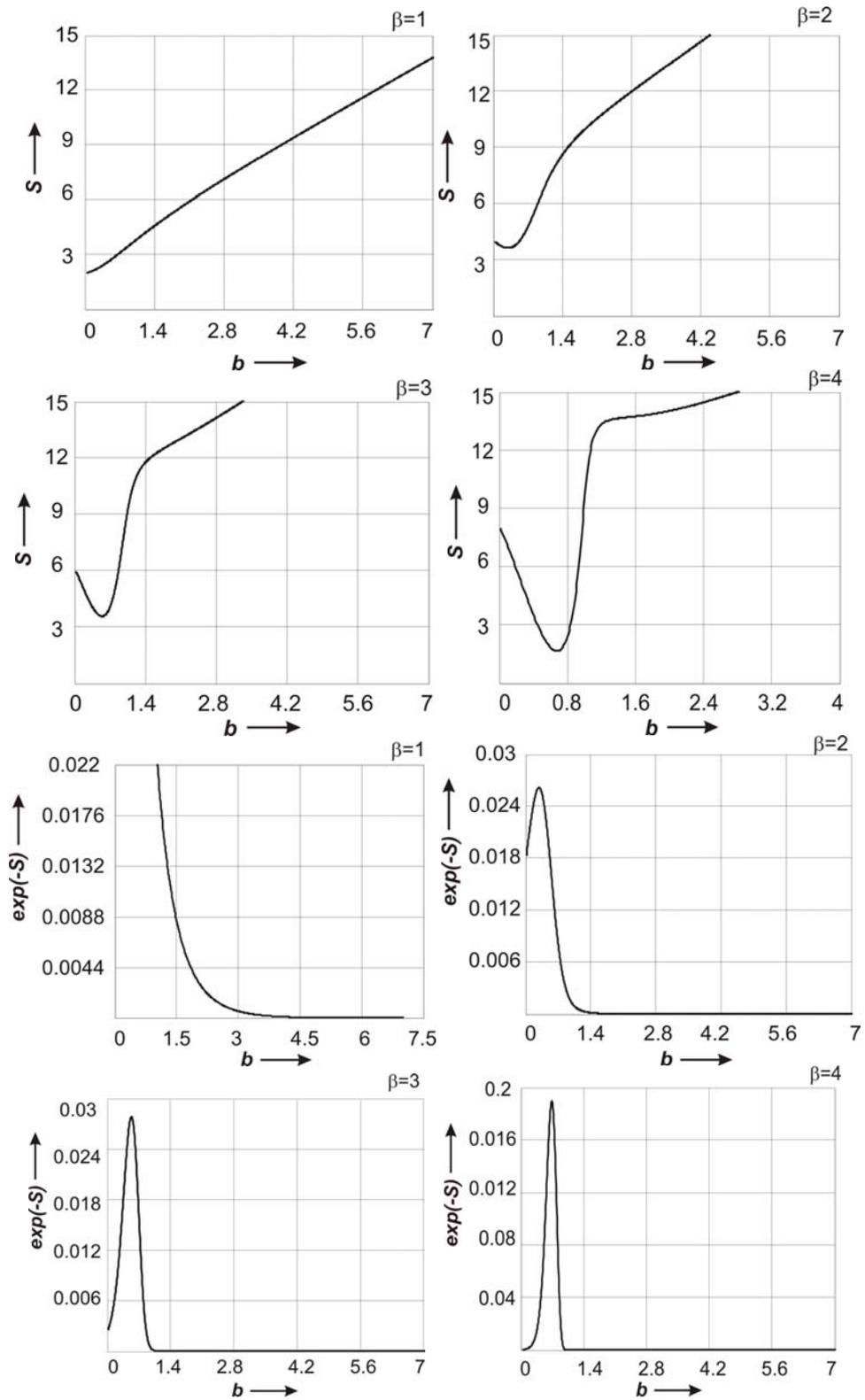


Рис. 4. Зависимость квазиклассического действия S и величины $\exp(-S)$ от параметра асимметрии с учетом влияния локальной моды среды-термостата

С учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата зависимость $\Gamma = V \exp(-S)$ демонстрирует особенности, представленные на рис. 5.

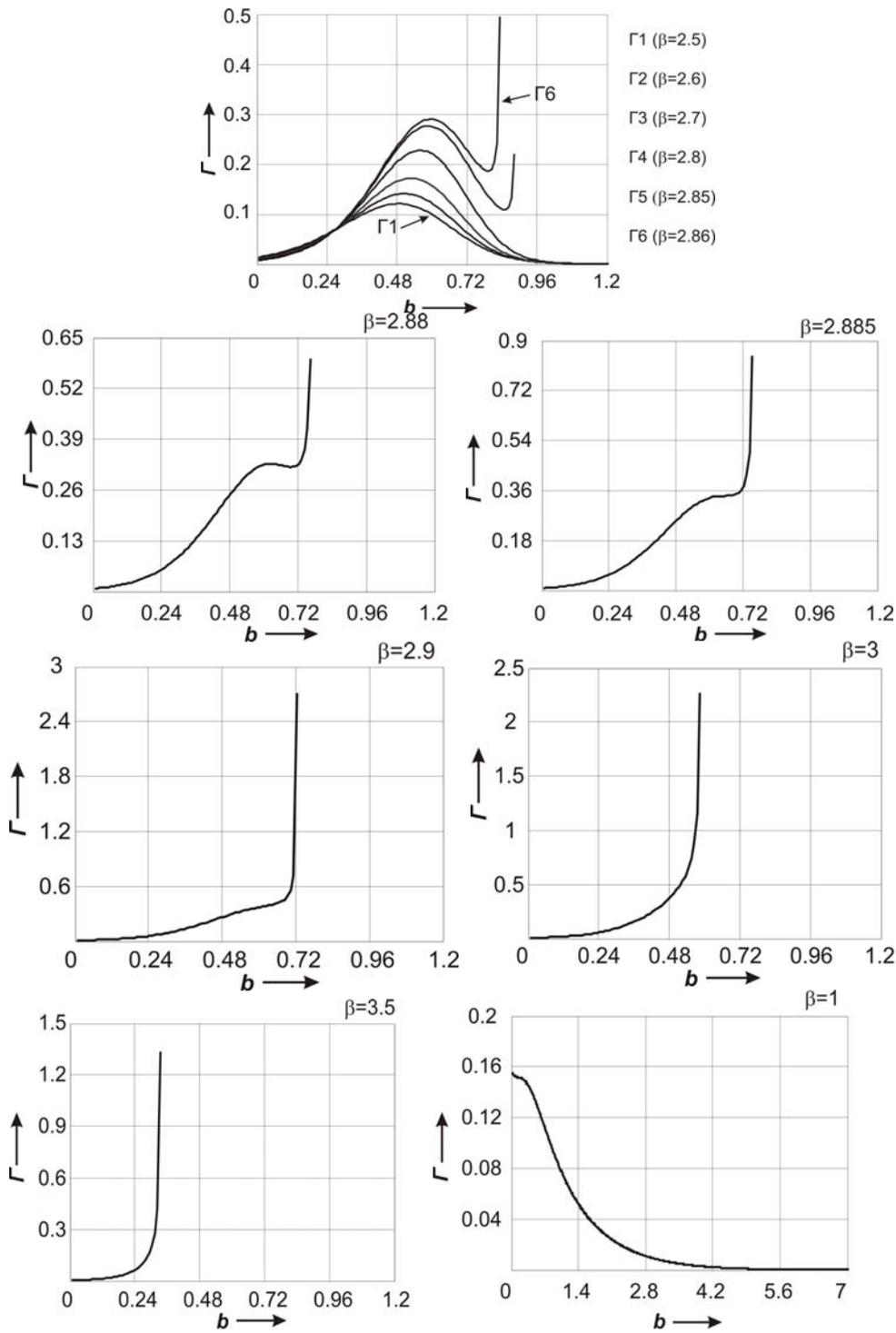


Рис. 5. Зависимость $\Gamma = V \exp(-S)$ от параметра асимметрии потенциала (пропорционального величине приложенного электрического поля) с учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата

В достаточно узком диапазоне параметров можно получить дополнительные особенности на аналогичной зависимости.

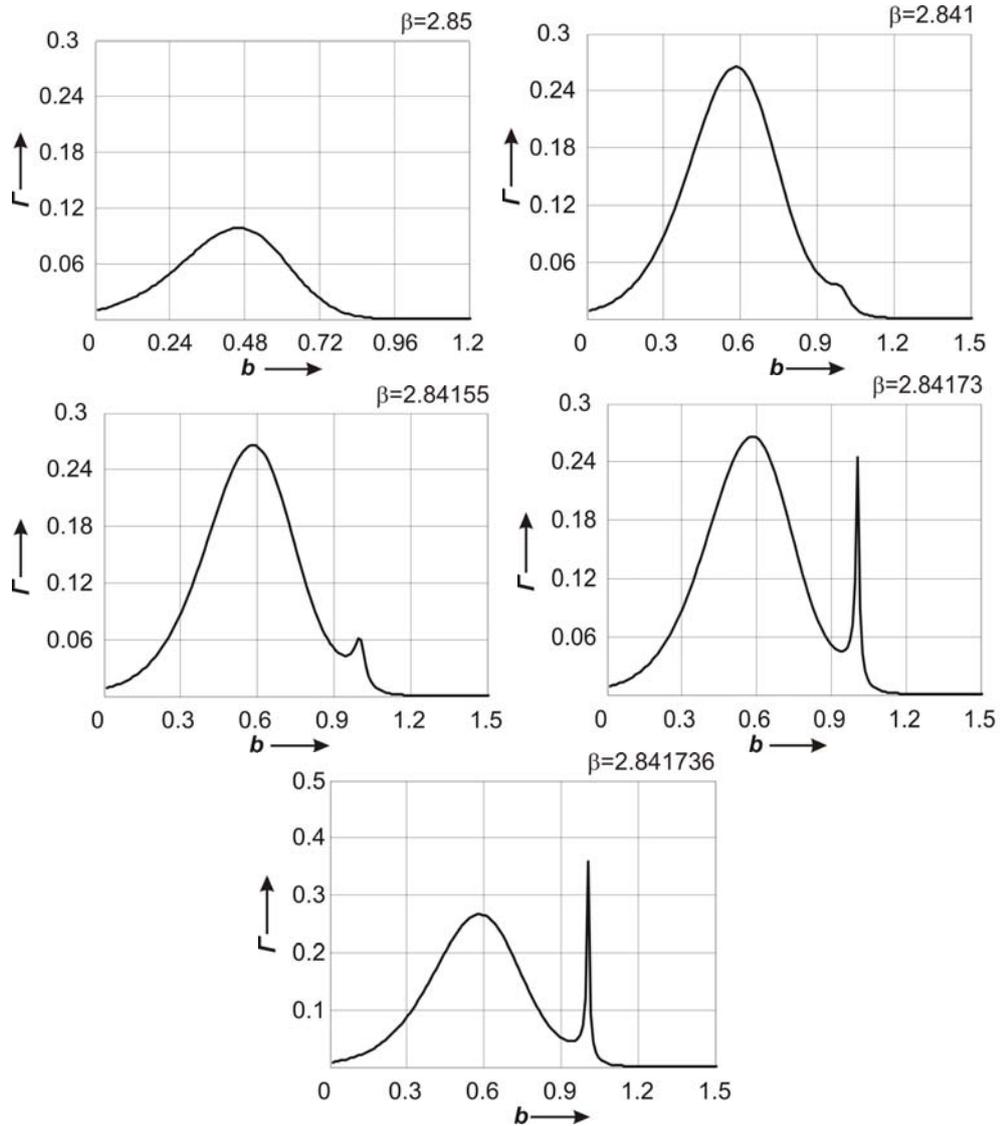


Рис. 6. Зависимость $\Gamma = V \exp(-S)$ от параметра асимметрии потенциала с учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата

Результаты сравнения таких дополнительных особенностей с экспериментальными ВАХ (для КТ из циркония в матрице из оксида кремния, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского) представлены на рис. 7.

Дополнительный эксперимент по визуализации локальной плотности состояний в квантовых точках InAs/GaAs методом комбинированной АСМ/СТМ был выполнен в Казанском физико-техническом институте при участии Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Схема эксперимента представлена на рис. 8.

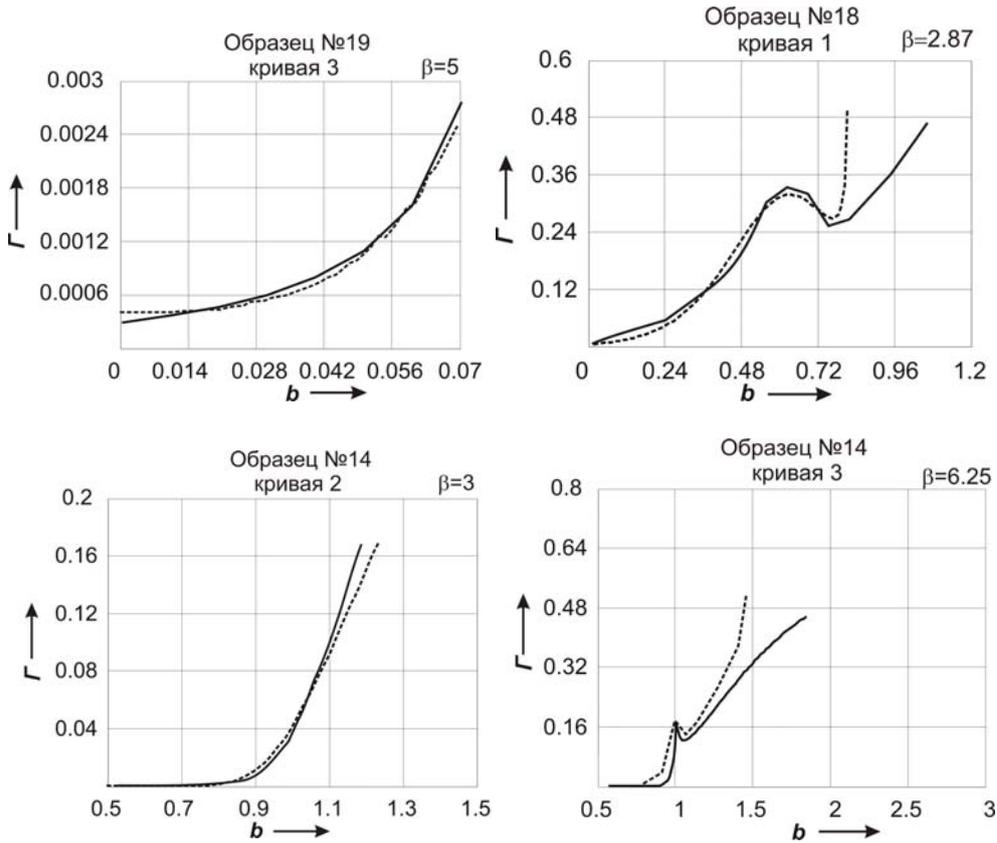


Рис. 7. Сравнение теоретических кривых (пунктирные линии) в модели для $\Gamma = V \exp(-S)$ с учетом влияния локальной моды среды-термостата с экспериментальными кривыми (сплошные линии)

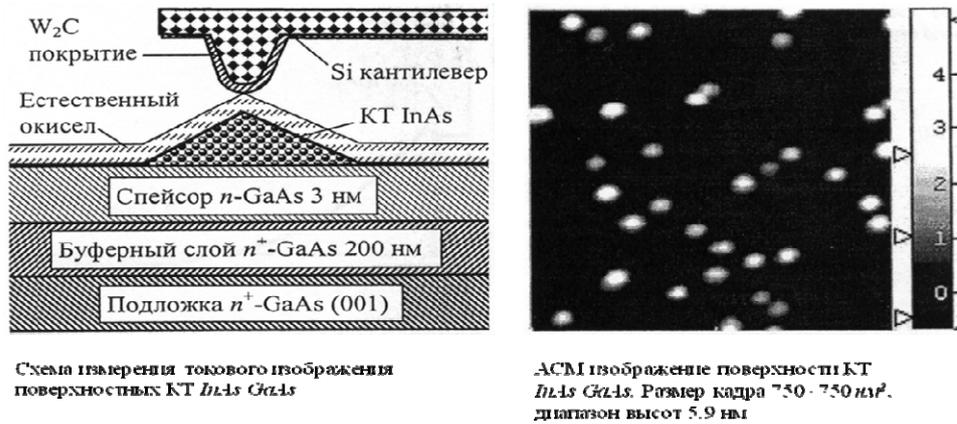


Рис. 8. Схема измерения токового изображения поверхностных КТ InAs/GaAs

Качественное сравнение модельной кривой вероятности 1D-диссипативного туннелирования (10) (с учетом влияния локальной фоновой моды среды-термостата, (15) и (16)) и экспериментальной ВАХ для полупроводниковых КТ из InAs/GaAs представлено на рис. 9.

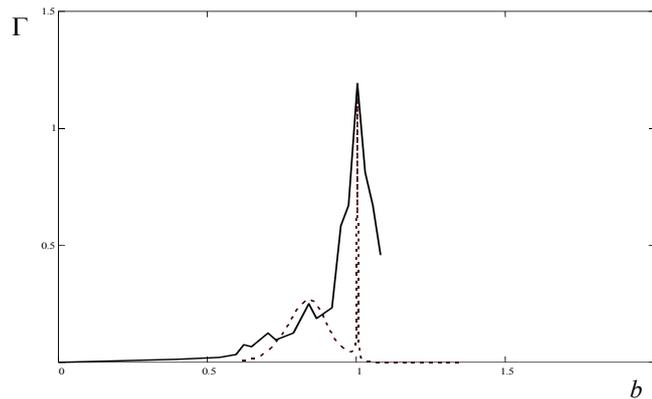


Рис. 9. Сравнение теоретических кривых (пунктирные линии) в модели для $\Gamma = B \exp(-S)$ с учетом влияния локальной моды среды-термостата с экспериментальными кривыми (сплошные линии)

Таким образом, проведенный анализ продемонстрировал качественное соответствие расчетных кривых для вероятности туннелирования с некоторыми экспериментальными ВАХ в схемах исследования управляемых характеристик проводимости отдельных металлических и полупроводниковых квантовых точек в системах с совмещенными СТМ/АСМ.

Список литературы

1. **Тавгер, Б. А.** Квантовые размерные эффекты в полупроводниковых и полуметаллических пленках / Б. А. Тавгер, В. Я. Демиховский // *Успехи физических наук*. – 1968. – Т. 96, № 1. – С. 61–86.
2. **Имри, Й.** Введение в мезоскопическую физику / Й. Имри. – М. : Физматлит, 2002. – 304 с.
3. **Caldeira, A. O.** Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems / A. O. Caldeira, A. J. Leggett // *Phys. Rev. Lett.* – 1981. – V. 46, № 4. – P. 211–214.
4. **Ларкин, А. И.** Квантовое туннелирование с диссипацией / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1983. – Т. 37, № 7. – С. 322–325.
5. **Ларкин, А. И.** Влияние квантования уровней на время жизни метастабильных состояний / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1986. – Т. 91, № 1 (7). – С. 318–325.
6. **Гантмахер, В. Ф.** Встречи в мезоскопической области (Мезоскопические и сильнокоррелированные электронные системы «Черноголовка – 97») / В. Ф. Гантмахер, М. В. Фейгельман // *Успехи физических наук*. – 1998. – Т. 168, № 2. – С. 113–116.
7. **Тернов, И. М.** Квантовая механика и макроскопические эффекты / И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 198 с.
8. Введение в современную мезоскопию / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, А. А. Овчинников и др. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2003. – 570 с.
9. *Transfer processes in low-dimensional systems* : сб. ст. / под ред. В. Д. Кревчика, В. Я. Кривнова, М. Б. Семенова, К. Yamamoto. – UT Research Institute Press, Tokyo, Japan, 2005. – 690 p.
10. Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах / под ред. Э. Леггета, В. Д. Кревчика, Ю. Н. Овчинникова, М. Б. Семенова, К. Ямамото и др. – М. : Физматлит, 2011. – 496 с.

11. **Эфрос, Ал. Л.** Межзонное поглощение света в полупроводниковом шаре / Ал. Л. Эфрос, А. Л. Эфрос // Физика и техника полупроводников. – 1982. – Т. 16, № 7. – С. 1209–1214.
-

Кревчик Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of physics, Penza State University

Семенов Михаил Борисович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра физики, Пензенский
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Semenov Mikhail Borisovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of physics, Penza State University

Зайцев Роман Владимирович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра физики,
Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Zaytsev Roman Vladimirovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of physics,
Penza State University

Козенко Сергей Евгеньевич

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Kozenko Sergey Evgenyevich

Postgraduate student,
Penza State University

Манухина Мария Александровна

аспирант, Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Manukhina Maria Alexandrovna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 539.23; 539.216.1; 537.311.322

Влияние диэлектрической матрицы на туннельные вольт-амперные характеристики в квантовых точках в условиях внешнего электрического поля / В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Р. В. Зайцев, С. Е. Козенко, М. А. Манухина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 119–135.

БИХРОМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАКАЧКИ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО УПРАВЛЕНИЯ УСИЛЕНИЕМ ТЕРАГЕРЦЕВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ¹

Аннотация. Теоретически исследованы схемы усиления терагерцевого излучения в полупроводниковой сверхрешетке, основанные на использовании бихроматического поля накачки. Показано, что в данных схемах усиление слабого пробного поля возможно на частоте, несоизмеримой с частотами полей накачки в условиях отсутствия разрушающих усиление нестабильностей.

Ключевые слова: сверхрешетка, терагерцевое излучение.

Abstract. The authors theoretically investigate amplification methods based on the use of bichromatic pump field. It is shown that the amplification of the weak probe field in these methods is possible without destructive instabilities.

Key words: superlattice, terahertz radiation.

Введение

Терагерцевое (ТГц) излучение обладает рядом интересных с практической точки зрения свойств, которые могут быть использованы во многих областях науки и техники. Тем не менее ТГц-диапазон остается наиболее слабо исследованной и используемой частью электромагнитного спектра из-за сложности детектирования и генерации излучения в данном диапазоне.

Используемые в настоящее время источники ТГц-излучения обладают рядом существенных недостатков, главные из которых: необходимость мощной накачки и низкие рабочие температуры. Этим недостаткам можно избежать, если в качестве активной среды источника использовать полупроводниковую сверхрешетку. Идея использовать сверхрешетку, работающую по принципу блоховского осциллятора для генерации ТГц-излучения, была высказана в конце 1960-х гг. Эсаки и Тсу [1], однако практическая реализация такого устройства натолкнулась на трудности, связанные с формированием нестабильностей волн пространственного заряда (доменов) в сверхрешетке в условиях отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП), совпадающей с областью генерации.

Одним из путей решения данной проблемы является введение в систему переменного микроволнового поля накачки и получение усиления на его гармониках [2–8]. Такое усиление имеет параметрическую природу [7]. Однако и в этом случае области усиления частично перекрываются с областями нестабильностей, что создает некоторые трудности управления режимом генерации.

В данной работе мы предлагаем усовершенствовать этот режим усиления и использовать вместо монохроматического поля накачки переменное бихроматическое поле с соизмеримыми частотами. Мы рассматриваем случай, когда частота усиливаемого ТГц-излучения несоизмерима с частотами полей накачки, и предполагаем, что наличие еще одного переменного поля

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, ГК № 11.519.11.3023.

позволит расширить область усиления по сравнению с областью неустойчивостей, что делает данный режим усиления более предпочтительным с точки зрения практической реализации.

1. Схема усиления, основанная на использовании бихроматического поля накачки вместе с сильным постоянным полем

Пусть сверхрешетка помещена в постоянное и переменное бихроматическое (модулированное) поле накачки:

$$E_{pump} = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (1)$$

где E_0 – постоянное электрическое поле.

Второе переменное поле накачки является гармоникой первого, т.е. $\omega_2 = m\omega_1$, где $m = 2, 3, 4, \dots$ (рис. 1).

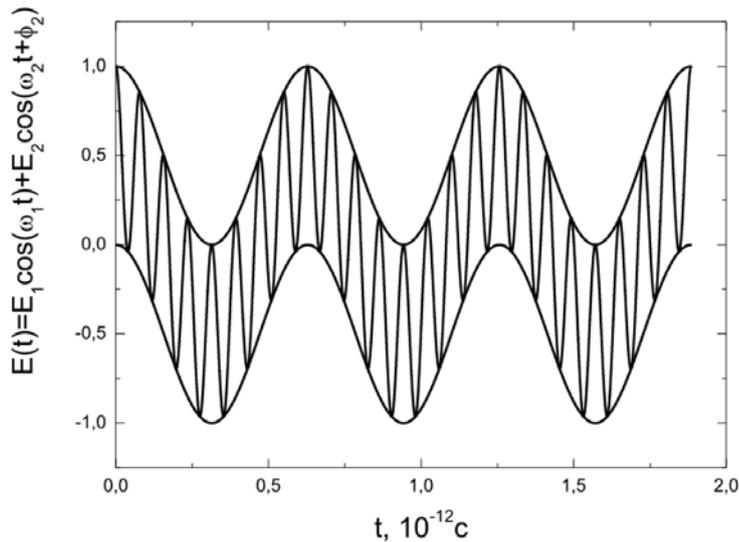


Рис. 1. Бихроматическое (модулированное) поле накачки

Рассмотрим отклик системы на слабое пробное поле $E_{pr} = E_3 \cos(\omega_3 t)$, частота которого несоизмерима с частотами полей накачки. Для этого сначала найдем поглощение произвольного пробного поля по формуле

$$A(\omega_3) = \langle \bar{V}(t) \cos(\omega_3 t) \rangle_t, \quad (2)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ – усреднение по времени; $\bar{V}(t)$ – средняя скорость электрона в мини-зоне,

$$\bar{V}(t) = \int V(p) f(p, t) dp. \quad (3)$$

Здесь интегрирование выполняется в пределах мини-зоны Бриллюэна $|p| \leq \pi \hbar / d$, $V = \partial \epsilon(p) / \partial p = V_0 \sin(pd / \hbar)$ – скорость электрона, $V_0 = \Delta d / (2 \hbar)$ – максимальная скорость электрона в мини-зоне; d – период сверхрешетки.

Заметим, что так как частоты поля накачки и пробного поля несоизмеримы, поглощение не зависит от разности фаз между пробным полем и полями накачки.

Функция распределения $f(p, t)$ находится из решения кинетического уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} - eE(t) \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (4)$$

с использованием дисперсионного соотношения в приближении сильной связи

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{pd}{\hbar}\right) \right], \quad (5)$$

где Δ – ширина мини-зоны; $f^{eq} = \frac{d}{2\pi\hbar I_0} \exp\left(\frac{\Delta}{2k_B T} \cos\left(\frac{pd}{\hbar}\right)\right)$ – равновесная функция распределения; $I_i(y)$ – модифицированная функция Бесселя аргумента $y = \frac{\Delta}{2k_B T}$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Будем искать решение кинетического уравнения Больцмана в виде ряда

$$f(p, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(t) e^{im\varphi}, \quad f^{eq}(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m^{eq} e^{im\varphi}, \quad (6)$$

где $\varphi = pd / \hbar$; $f_m^{eq}(p) = dI_m(y) / (2\pi\hbar I_0(y))$ [8].

Подставив $f(p, t)$ в уравнение (4), получим выражение для f_m :

$$f_m = f_m^{eq} \sum_{l_1, l_2, l_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3=-\infty}^{\infty} J_{l_1}(m\beta_1) J_{l_2}(m\beta_2) J_{l_3}(m\beta_3) \times \\ \times J_{l_1+\nu_1}(m\beta_1) J_{l_2+\nu_2}(m\beta_2) J_{l_3+\nu_3}(m\beta_3) \times \\ \times \exp\{i[\nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 + \nu_3\omega_3]\} \frac{\exp\{i(\nu_2\varphi_2 + \nu_3\varphi_3)\}}{1 - i(m\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + l_3\omega_3)\tau},$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя; $\beta_i = \Omega_i / \omega_i$, $\Omega_i = edE_i / \hbar$ ($i = 0, 1, 2, 3$); $V_p = V_0 I_1(y) / (2I_0(y))$ – пиковая скорость, соответствующая пиковому току на вольт-амперной характеристике Эсаки – Тсу.

Используя найденные коэффициенты разложения для функции распределения и формулы (2), (3), получим выражение для поглощения произвольного пробного поля в единицах $A_0 = V_p I_1(y) / I_0(y)$:

$$A = \sum_{l_1, l_2, l_3=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) J_{l_3}(\beta_3) J_{l_1-jm}(\beta_1) J_{l_2+j}(\beta_2) \times$$

$$\times \left[J_{l_3-1}(\beta_3) + J_{l_3+1}(\beta_3) \right] \frac{\sin(j\varphi_2) + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + l_3\omega_3)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + l_3\omega_3)^2 \tau^2}. \quad (7)$$

В случае слабого пробного поля ($E_3 \ll E_1, E_2$) необходимо взять только определенную комбинацию индексов функции Бесселя в формуле (7). В слабосигнальном приближении можно считать $\beta_3 \ll 1$. Тогда, если учитывать только члены нулевого и первого порядка малости по β_3 , в выражении (7) следует положить $l_3 = 0, \pm 1, \pm 2$. В этом случае выражение для поглощения слабого пробного поля имеет вид

$$A = \frac{\beta_3}{2} \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) J_{l_1-jm}(\beta_1) J_{l_2+j}(\beta_2) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sin(j\varphi_2) + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \omega_3)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \omega_3)^2 \tau^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(j\varphi_2) + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 - \omega_3)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2 - \omega_3)^2 \tau^2} \right\}. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что выражение для поглощения слабого пробного поля в случае, когда частота пробного поля несоизмерима с частотами полей накачки, содержит лишь компоненту, описывающую некогерентное взаимодействие пробного поля и поля накачки

$$A = \frac{\beta_3}{2} A^{incoh}.$$

Поглощение A связано с коэффициентом поглощения стандартным соотношением

$$\alpha(\omega_3) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_3} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} A^{incoh}, \quad (9)$$

где α – коэффициент поглощения; $\omega_p = \sqrt{8\pi e^2 n_0 V_p d / (\varepsilon \hbar)}$ – плазменная частота; n_0 – концентрация электронов; ε – реальная часть диэлектрической проницаемости; c – скорость света.

В зависимости от параметров системы поглощение (9) может быть как положительным (поглощение слабого пробного поля), так и отрицательным (усиление слабого пробного поля). В последнем случае важным является анализ стабильности системы в условиях усиления. Поскольку нестабильности при наличии постоянного поля формируются в условиях отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП) [9], то желательно, чтобы усиление достигалось при положительной дифференциальной проводимости (ПДП), что позволит избежать возникновения доменов.

Для анализа стабильности системы найдем плотность постоянного тока через сверхрешетку по формуле

$$j_{dc} = -e \langle \bar{V}(t) \rangle_t. \quad (10)$$

Проводя вычисления, аналогичные поглощению, для плотности тока получим (в единицах $j_0 = 2eV_p$)

$$j_{dc} = \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{j = -\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) J_{l_1 - jm}(\beta_1) J_{l_2 + j}(\beta_2) \times \frac{\sin(j\varphi_2) + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (\Omega_0 + l_1\omega_1 + l_2\omega_2)^2 \tau^2}. \quad (11)$$

Штриховкой на графике (рис. 2,а) выделена область усиления без формирования нестабильностей; на рис. 2,б штриховкой выделена область ПДП, которая перекрывается с областью усиления. Из приведенных графиков для поглощения и плотности тока (рис. 2) видно, что модуляция поля накачки приводит к появлению дополнительных максимумов на вольт-амперной характеристике (ВАХ) сверхрешетки в отличие от зависимости, полученной Эсаки и Тсу ($E_{cr} = \hbar/(ed\tau)$). Численный анализ показал, что области усиления могут перекрываться с областями ПДП, что видно на графике. Это означает, что возможно усиление ТГц-излучения без формирования нестабильностей. Таким образом, сравнение областей усиления с областями нестабильностей показывает, что области усиления шире областей нестабильностей.

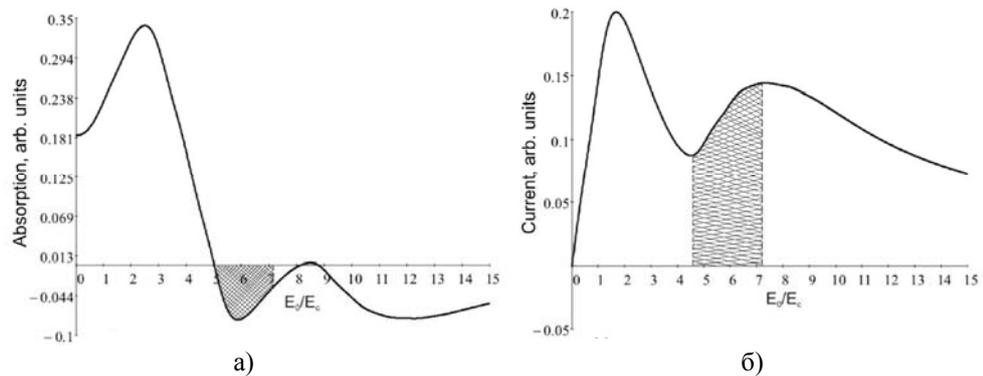


Рис. 2. Зависимость поглощения (а) и плотности тока (б) от постоянного поля для случая, когда второе поле накачки является третьей гармоникой первого; $\Omega_1\tau = 5$; $\Omega_2\tau = 3$; $\omega_1\tau = 1$; $\omega_2\tau = 3$; $\omega_3\tau = 4,11$; $m = 3$

Следует отметить, что для случая, когда второе переменное поле накачки – четная гармоника первого, ток при нулевом постоянном поле ($E_0 = 0$) отличен от нуля, что видно из рис. 3. Таким образом, в этом случае в сверхрешетке под действием переменного бихроматического поля может возникать постоянное электрическое поле, что приводит к возникновению постоянного тока, причем ток может быть как положительным, так и отрицательным.

Из формулы (8) следует, что усилением ТГц-излучения можно управлять, изменяя разность фаз φ_2 полей накачки, а максимальное усиление возможно при некоторой оптимальной фазе φ_{opt} .

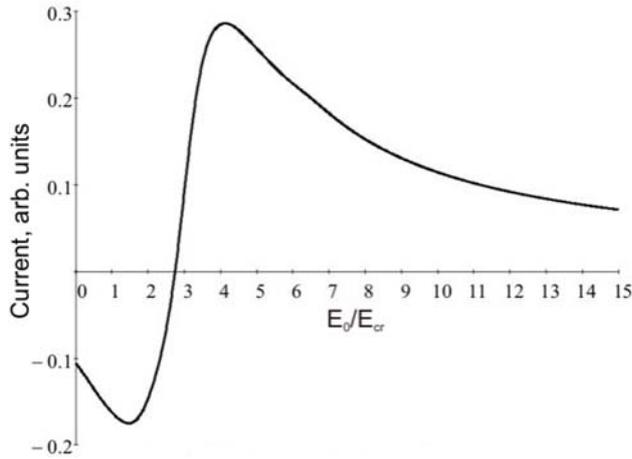


Рис. 3. Зависимость плотности тока от постоянного поля для случая, когда второе поле накачки является второй гармоникой первого; $\Omega_1\tau = 5$; $\Omega_2\tau = 3$; $\omega_1\tau = 1$; $\omega_2\tau = 3$; $\omega_3\tau = 4,11$; $m = 2$

Заметим, что если мы положим $\varphi_2 = 0$ в выражении (8) для поглощения слабого пробного поля и в выражении для плотности тока (11), то поглощение можно представить в виде конечной разности вида

$$A = \frac{j_{dc}(E_0/E_{cr} + \omega_3) - j_{dc}(E_0/E_{cr} - \omega_3)}{2\hbar\omega_3} ed. \quad (12)$$

В этом случае судить о возможности усиления можно непосредственно из анализа зависимости постоянного тока от постоянного поля. Если тангенс угла наклона прямой CD (рис. 4) отрицательный при величине постоянного поля E_{dc} , то и поглощение будет отрицательным (усиление), и наоборот.

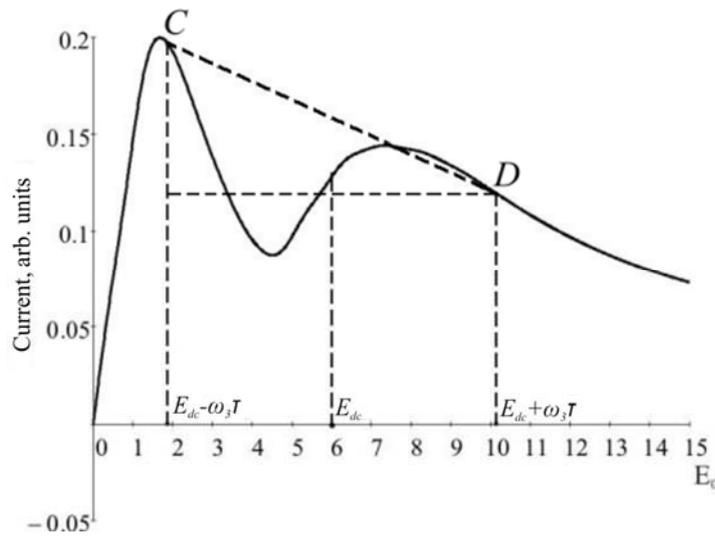


Рис. 4. Определение возможности усиления по току. По оси абсцисс – постоянное поле в единицах E_{cr} ; $E_{dc} = 6E_{cr}$ и $\omega_3\tau = 4,11$. Точка C соответствует значению плотности тока при $(E_{dc} - \omega_3\tau)$, точка D – плотности тока при $(E_{dc} + \omega_3\tau)$

Из рис. 4 видно, что тангенс угла наклона прямой CD отрицательный, т.е. при таких значениях E_{dc} и $\omega_3\tau$ должно быть усиление, и из рис. 2 видно, что это так.

2. Схема усиления, основанная на использовании чисто бихроматического поля накачки

Рассмотрим случай, когда на сверхрешетку действует только переменное бихроматическое поле. Проведя вычисления, аналогичные вычислениям для получения соотношений (7) и (8), получим выражение для поглощения слабого пробного поля в случае переменного поля накачки:

$$A = \frac{\beta_3}{2} \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{j = -\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) J_{l_1 - jm}(\beta_1) J_{l_2 + j}(\beta_2) \times \left\{ \frac{\sin(j\varphi_2) + (l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \omega_3)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \omega_3)^2 \tau^2} - \frac{\sin(j\varphi_2) + (l_1\omega_1 + l_2\omega_2 - \omega_3)\tau \cos(j\varphi_2)}{1 + (l_1\omega_1 + l_2\omega_2 - \omega_3)^2 \tau^2} \right\}. \quad (13)$$

Выражение (13) так же, как и (8), может быть как положительным (поглощение), так и отрицательным (усиление).

Для анализа стабильности системы в формуле для плотности постоянного тока (11) устремим постоянное поле к нулю ($\Omega_0 \rightarrow 0$):

$$j_{dc} \approx j_{dc}|_{\Omega_0=0} + \left. \frac{\partial j_{dc}}{\partial \Omega_0} \right|_{\Omega_0=0} \Omega_0. \quad (14)$$

Численный анализ показал, что в системе может возникать АОП, а при АОП формируются неустойчивости [2]. Для анализа стабильности системы в случае нечетных гармоник необходимо рассмотреть второе слагаемое в формуле (14). В результате численного анализа было получено, что в зависимости от параметров системы оно может быть как положительным, так и отрицательным. Следовательно, для случая нечетных гармоник можно подобрать параметры так, что неустойчивости в режиме усиления не будут формироваться. На рис. 5 представлен график зависимости поглощения слабого пробного поля от его частоты для случая, когда область усиления не перекрывается областью неустойчивостей (область усиления выделена штриховкой).

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены две схемы усиления ТГц-излучения с помощью полупроводниковой сверхрешетки, помещенной в бихроматическое поле накачки: схема с постоянным полем, приложенным к сверхрешетке, и схема, в которой на сверхрешетку действует только переменное поле.

Для обеих схем на основе решения кинетического уравнения Больцмана были получены аналитические выражения для поглощения пробного ТГц-

излучения, частота которого несоизмерима с частотами полей накачки, рассмотрен случай слабого пробного поля. Также для схемы с постоянным полем было получено выражение для нулевой гармоники тока и показано, что бихроматическое поле накачки модифицирует статическую ВАХ сверхрешетки. Модифицированная ВАХ содержит дополнительные области положительной дифференциальной проводимости, что способствует расширению областей стабильности системы. Для обеих схем усиления найдены области, в которых поглощение является отрицательным (области усиления), причем они шире областей неустойчивостей.

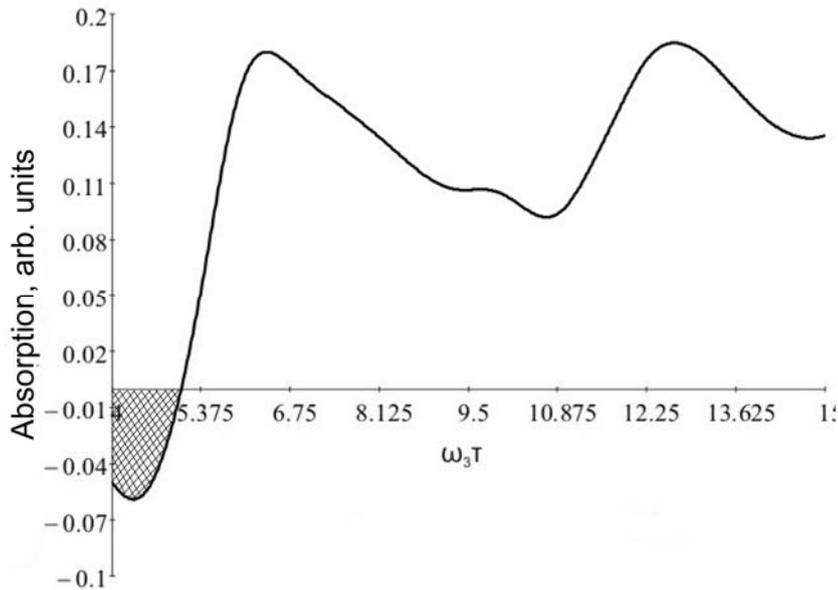


Рис. 5. График зависимости поглощения слабого пробного поля от его частоты для случая переменного поля накачки; $\Omega_1 \tau = 10$; $\Omega_2 \tau = 8$; $\omega_1 \tau = 0,8$; $\omega_2 \tau = 4$; $\omega_3 \tau = 4,11$; $m = 5$ (при таких значениях полей и частот неустойчивости не формируются)

Анализ схемы с только переменным полем накачки показал, что в случае, когда второе поле накачки является нечетной гармоникой первого поля накачки, могут возникать неустойчивости. Но в этом случае можно подобрать напряженности и частоты полей накачки так, что неустойчивости в режиме усиления не будут формироваться.

Список литературы

1. **Esaki, L.** Superlattice and Negative Differential Conductivity in Semiconductors / L. Esaki and R. Tsu // IBM J. Res. Dev. – 1970. – V. 14, № 1. – P. 61–65.
2. **Alekseev, K. N.** Suppressed absolute negative conductance and generation of high-frequency radiation in semiconductor superlattices / K. N. Alekseev, M. V. Gorkunov, N. V. Demarina, T. Hyart, N. V. Alexeeva and A. V. Shorokhov // Europhysics Letters. – 2006. – V. 73, № 6. – P. 934–940.
3. **Kroemer, H.** Large-amplitude oscillation dynamics and domain suppression in a superlattice Bloch oscillator / H. Kroemer // Physical Review. – 1958. – V. 109. – P. 1856.

4. **Павлович, В. В.** О нелинейном усилении электромагнитной волны в полупроводнике со сверхрешеткой / В. В. Павлович // Физика твердого тела. – 1977. – Т. 19, № 1. – С. 97.
5. **Wacker, A.** Semiconductor Superlattices: A model system for nonlinear transport / A. Wacker // Physics Reports. – 2001. – V. 357. – P. 1.
6. **Hyart, T.** THz parametric gain in semiconductor superlattices in the absence of electric domains / T. Hyart, N. V. Alexeeva, A. Leppanen, K. N. Alekseev // Applied Physics Letters. – 2006. – V. 89. – P. 132105.
7. **Hyart, T.** Theory of Parametric Amplification in Superlattices / T. Hyart, A. V. Shorokhov, K. N. Alekseev // Physical Review Letters. – 2007. – V. 98. – P. 220404.
8. **Shorokhov, A. V.** High-frequency absorption and gain in superlattices: Semiquasistatic approach / A. V. Shorokhov, K. N. Alekseev // Physica E (Amsterdam). – 2006. – V. 33. – P. 284.
9. **Игнатов, А. А.** Bloch oscillations of electrons and instability of space-charge waves in semiconductor superlattices / А. А. Игнатов, В. И. Шашкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1987. – V. 93. – P. 935.

Позднякова Олеся Дмитриевна

магистрант, Институт физики и химии,
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: pozdn-olesya@yandex.ru

Pozdnyakova Olesya Dmitrievna

Applicant for master degree, Institute
of physics and chemistry,
Mordovia State University
named after N. P. Ogaryov (Saransk)

Шорохов Алексей Владимирович

доктор физико-математических наук,
доцент, кафедра теоретической физики,
Институт физики и химии, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: alex.shorokhov@mail.ru

Shorokhov Aleksey Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of theoretical physics,
Institute of physics and chemistry,
Mordovia State University named
after N. P. Ogaryov (Saransk)

УДК 538.958

Позднякова, О. Д.

Бихроматическое поле накачки как эффективное средство управления усилением терагерцевого излучения в полупроводниковой сверхрешетке / О. Д. Позднякова, А. В. Шорохов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 136–144.

УДК 539.23; 539.216.1; 537.311.322.

В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, С. Е. Козенко, В. А. Рудин

РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДОНОРОВ В КВАНТОВЫХ ЯМАХ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ¹

Аннотация. Теоретически исследовано влияние внешних электрического и магнитного полей на среднюю энергию связи резонансного $D^{(-)}$ -состояния и ширину резонансного уровня в параболической квантовой яме. Предполагалось, что распадность примесного резонансного состояния обусловлена процессом диссипативного туннелирования. Показано, что наименьшее время жизни имеют резонансные $D^{(-)}$ -состояния, соответствующие $D^{(-)}$ -центрам, расположенным вблизи границ квантовой ямы. Найдено, что электрическое поле стимулирует распад резонансного примесного состояния за счет электронной поляризации и штарковского сдвига энергии. Показано, что магнитное поле оказывает стабилизирующее действие на резонансные $D^{(-)}$ -состояния в квантовой яме за счет эффекта магнитного вымораживания и блокировки туннельного распада.

Ключевые слова: параболическая квантовая яма, средняя энергия связи $D^{(-)}$ -состояния, ширина примесного резонансного уровня, электрическое и магнитное поле, спектры фотоионизации $D^{(-)}$ -центра, диссипативное туннелирование.

Abstract. The authors study the influence of external electric and magnetic fields on the average binding energy of the resonance $D^{(-)}$ -status and width of the resonance level in the parabolic quantum well. It is assumed that the decay rate of the impure resonance condition is caused by the process of dissipative tunneling. It is shown that the resonance $D^{(-)}$ -status, corresponding to $D^{(-)}$ -centers, located near the borders of quantum holes have the least life time. The researchers have revealed that an electric field stimulates the disintegration of resonance impurity states by e-polarization and stark shift of energy. It is shown that the magnetic field has a stabilising effect on the resonant $D^{(-)}$ state in quantum well due to the effect of magnetic freezing and locking of tunnel collapse.

Key words: parabolic quantum well, average binding energy $D^{(-)}$ -status, width of the impure resonance level, electric and magnetic field, photo-ionization spectra $D^{(-)}$ -centre, dissipative tunneling.

Введение

Интерес к примесным резонансным состояниям в полупроводниковых квантовых ямах (КЯ) связан с возможностью создания новых источников стимулированного излучения на примесных переходах [1]. Полупроводниковые наноструктуры представляют широкие возможности управления примесными состояниями, причем их оптические свойства могут зависеть не только от положения примеси относительно гетерограниц, но и от туннельной прозрачности соответствующих потенциальных барьеров, а также наличия внешних электрического и магнитного полей. Влияние внешнего электриче-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-97002) и Фонда фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства науки Республики Казахстан (грант 1253/ГФ).

ского поля \mathbf{E} на различные оптические переходы в одиночных КЯ исследовалось теоретически [2] и экспериментально [3]. Было показано [2], что для ряда оптических переходов зависимости вероятностей оптических переходов от \mathbf{E} содержат максимумы, что связано с трансформацией огибающих волновых функций, вызванной внешним электрическим полем. Это открывает определенные перспективы для управления вероятностью оптических переходов в КЯ посредством варьирования \mathbf{E} . Необходимо отметить, что селективно-легированные полупроводниковые КЯ представляют большой интерес для исследования так называемых D^- -состояний (локализованных и резонансных), соответствующих присоединению дополнительного электрона к нейтральному мелкому донору. Интерес к D^- -состояниям в КЯ обусловлен тем, что в объемных полупроводниках такие состояния могут существовать только в неравновесных условиях, например при фотовозбуждении [4].

Эксперименты показывают [5, 6], что энергия связи локализованных D^- -состояний в КЯ существенно зависит от величины внешнего магнитного поля. Так, в случае D^- -центров в селективно-легированных многоямных структурах GaAs/AlGaAs гибридизация размерного и магнитного квантования приводит к росту энергии связи локализованных D^- -состояний в несколько раз по сравнению с объемным полупроводником [5]. Возможность управления энергией связи D^- -центров в магнитном поле позволяет в принципе изменять концентрацию носителей заряда в достаточно широких пределах вследствие экспоненциальной зависимости функции распределения от энергии вблизи уровня Ферми в КЯ.

Цель настоящей работы состоит в теоретическом исследовании влияния внешних электрического и магнитного полей, а также диссипативного туннелирования на среднюю энергию связи D^- -состояния и ширину резонансного уровня.

Средняя энергия связи и уширение резонансного уровня $D^{(-)}$ -состояния в параболической квантовой яме

Для описания одноэлектронных состояний в КЯ используется модель потенциала конфайнмента в виде потенциала одномерного гармонического осциллятора:

$$V(z) = \frac{m^* \omega_0^2 z^2}{2}, \quad (1)$$

где m^* – эффективная масса электрона; ω_0 – характерная частота удерживающего потенциала КЯ; $-L/2 \leq z \leq L/2$; L – ширина КЯ. Векторы магнитной индукции \mathbf{B} и напряженности электрического поля \mathbf{E} направлены вдоль оси роста КЯ.

В симметричной калибровке векторного потенциала оператор Гамильтона \mathbf{H} в цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) -$$

$$-\frac{i\hbar\omega_B}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{m^*\omega_B^2\rho^2}{8} + \frac{m^*\omega_0^2z^2}{2} - |e|zE_0, \quad (2)$$

где $\omega_B = |e|B/m^*$ – циклотронная частота; $|e|$ – величина заряда электрона.

Собственные функции и собственные значения гамильтониана (2) определены соответственно как

$$\Psi_{n_\rho, n, m}(\rho, \varphi, z) = 2^{-\frac{n}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} a_B^{-1} a_0^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} \left[\frac{n_\rho!}{n!(n_\rho + |m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2a_B^2} \right)^{\frac{|m|}{2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a_B^2}\right) \times \\ \times H_n\left(\frac{z-z_0}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2a_0^2}\right) L_{n_\rho}^{|m|}\left(\frac{\rho^2}{2a_B^2}\right) \exp(im\varphi); \quad (3)$$

$$E_{n_\rho, m, n} = \frac{\hbar\omega_B}{2}(2n_\rho + |m| + m + 1) + \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2 E_0^2}{2m^* \omega_0^2}, \quad (4)$$

где $n_\rho = 0, 1, 2, \dots$ – радиальное квантовое число, соответствующее уровням Ландау; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – магнитное квантовое число; $n = 0, 1, 2, \dots$ – осцилляторное квантовое число; $a_B = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_B)}$ – магнитная длина; $a = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_0)}$ – характерная длина осциллятора; $L_{n_1}^{|m|}(x)$ – полиномы Лагерра; $H_n(y)$ – полиномы Эрмита.

Пусть D^- -центр локализован в точке $\mathbf{R}_a = (\rho_a, \varphi_a, z_a)$. Короткодействующий потенциал примеси моделируется потенциалом нулевого радиуса $V_\delta(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a)$ мощностью $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m^*)$:

$$V_\delta(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a) = \gamma \frac{\delta(\rho - \rho_a)}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_a) \times \\ \times \delta(z - z_a) \left[1 + (\rho - \rho_a) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (5)$$

где α определяется энергией связанного состояния E_i этого же D^- -центра в объемном материале.

С математической точки зрения задача определения средней энергии связи D^- -состояния состоит в построении одноэлектронной функции Грина для уравнения Шредингера при наличии электрического и магнитного полей и исследовании ее аналитических свойств. Одноэлектронная функция Грина $G(\rho, \varphi, z, \rho_1, \varphi_1, z_1; E_{\lambda_{BE}})$ к уравнению Шредингера, соответствующая источнику в точке (ρ_1, φ_1, z_1) и энергии $E_{\lambda_{BE}}$, запишется в виде

$$G(\rho, \varphi, z, \rho_1, \varphi_1, z_1; E_{\lambda_{BE}}) = \sum_{n_p, m, n} \frac{\Psi_{n_p, m, n}^*(\rho_1, \varphi_1, z_1) \Psi_{n_p, m, n}(\rho, \varphi, z)}{E_{\lambda_{BE}} - E_{n_p, m, n} - i\hbar\Gamma_0}, \quad (6)$$

где Γ_0 – вероятность диссипативного туннелирования; $E_{\lambda_{BE}}$ – собственные значения гамильтониана $\hat{H}_{BE} = \hat{H} + V_\delta(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a)$.

После выполнения суммирования по квантовым числам n_p, m, n и выделения расходящейся части функцию Грина (6) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda_B}^{(0)}) = & -\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}a_B^* a_d^3 \pi^2 E_d} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \rho_a^2}{4a_B^* a_d^2}\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2 + (z_a-z_0)^2}{4\beta a_d^2}\right) \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\beta(-\eta_{BE}^2 + a_B^{*2} - W_0) + \frac{1}{2} + i\Gamma_0^*\right)t\right] \times \\ & \times \left[\left(1 - e^{-2\beta t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2\beta a_B^{*2} t}\right)^{-1} \times \right. \\ & \times \exp\left[-\frac{2(z^* - z_0^*)(z_a^* - z_0^*)e^{-t} - \left[(z^* - z_0^*)^2 + (z_a^* - z_0^*)^2\right]e^{-2t}}{4\beta a_d^2 (1 - e^{-2t})}\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\rho^* + \rho_a^*}{4a_B^* a_d^2} \cdot \text{ch}t\right] \exp\left[\text{ch}\left(i(\varphi - \varphi_a) - a_B^{*-2}t\right) \frac{\rho\rho_a}{a_B^{*2}} \cdot \frac{\exp(-a_B^{*-2}t)}{1 - \exp(-2a_B^{*-2}t)}\right] + \\ & \left. + \sqrt{2\pi} \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{(\rho - \rho_a)^2}{4a_B^{*2} a_d^2 t} + \frac{(z - z_a)^2}{4\beta a_d^2 t}} \cdot \sqrt{\beta(-\eta_{BE}^2 + a_B^{*2} - W_0) + \frac{1}{2} + i\Gamma_0^*}\right]}{\sqrt{\frac{(\rho - \rho_a)^2}{4a_B^{*2} a_d^2 t} + \frac{(z - z_a)^2}{4\beta a_d^2 t}}}\right], \quad (7) \end{aligned}$$

где $a_B^* = a_B/a_d$, $\beta = E_d/\hbar\omega_0$, $W_0 = e^2 E_0^2 / 2m^* \omega_0^2 E_d$, $\Gamma_0^* = \hbar\Gamma_0/E_d$, $\eta_{\lambda_{BE}} = E_{\lambda_{BE}}/E_d$, E_d и a_d – эффективные боровская энергия и боровский радиус соответственно.

В соответствии с процедурой метода потенциала нулевого радиуса средняя энергия связи и ширина резонансного уровня D^- -состояния в суммарном поле определяются из решения дисперсионного уравнения вида

$$\alpha = \frac{2\pi\hbar^2}{m^*} (\hat{\mathbf{T}}G)(\rho_a, \varphi_a, z_a; \rho_a, \varphi_a, z_a), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{T}}G)(\rho_a, \varphi_a, z_a; \rho_a, \varphi_a, z_a) \equiv \\ & \equiv \lim_{\substack{\rho \rightarrow \rho_a \\ \varphi \rightarrow \varphi_a \\ z \rightarrow z_a}} \left[1 + (\rho - \rho_a) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right] G(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (7) в (8) и выполняя соответствующие предельные переходы, получим дисперсионное уравнение для определения средней энергии связи $\bar{E} = \text{Re } E_{\lambda BE}$ и ширины резонансного уровня $\Delta E = 2 \text{Im } E_{\lambda BE}$:

$$\begin{aligned} \eta_i = & \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \int_0^{\infty} dt \exp \left[- \left(\beta (-\eta_{BE}^2 + a_B^{*2} - W_0) + \frac{1}{2} + i\Gamma_0^* \right) t \right] \times \\ & \left\{ \left(1 - e^{-2\beta t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2\beta a_B^{*2} t} \right)^{-1} \exp \left[- \frac{(z_a^* - z_0^*)^2}{2\beta} \text{th} \frac{t}{2} \right] \exp \left[- \frac{\rho_a^{*2}}{a_B^{*2}} \text{th}(\beta a_B^{*-2} t) \right] \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[\cosh(a_B^{*-2} t) \frac{\rho_a^{*2}}{a_B^{*2}} \frac{\exp(-a_B^{*2} t)}{1 - \exp(-2a_B^{*2} t)} \right] - \frac{1}{2t\sqrt{2t}} \right\} - \\ & - \sqrt{\beta (-\eta_{BE}^2 + a_B^{*2} - W_0) + \frac{1}{2} + i\Gamma_0^*}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение для волновой функции $\Psi_{\lambda BE}(\rho, \varphi, z; 0, 0, 0)$ резонансного D^- -состояния в КЯ ($\mathbf{R}_a = (0, 0, 0)$), находящейся в магнитном и электрическом полях, запишется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda BE}(\rho, \varphi, z; 0, 0, 0) = & C_{BE} \exp \left(- \frac{\rho^{*2}}{4a_B^{*2}} \right) \exp \left(- \frac{(z^* - z_0^*)^2 + z_0^{*2}}{4\beta} \right) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} dt \exp \left[- \left(\beta (-\eta_{BE}^2 + a_B^{*-2} - W_0) + \frac{1}{2} + i\Gamma_0^* \right) t \right] \left(1 - e^{-2\beta t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2\beta a_B^{*-2} t} \right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left[\frac{2(z^* - z_0^*)z_0^* e^{-t} - \left[(z^* - z_0^*)^2 + z_0^{*2} \right] e^{-2t}}{4\beta(1 - e^{-2t})} \right] \exp \left[-\frac{\rho^*}{4a_B^*} \operatorname{cth}(a_B^{*-2} t) \right]. \quad (11)$$

Результаты численного анализа дисперсионного уравнения (10) применительно к резонансным D^- -состояниям в InSb КЯ представлены на рис. 1–4.

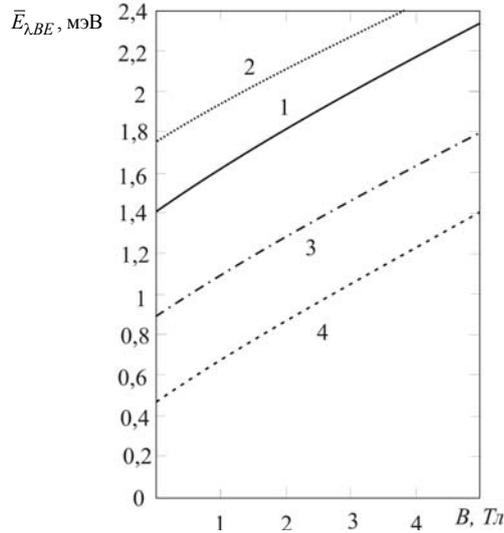


Рис. 1. Зависимость средней энергии связи $\bar{E}_{\lambda, BE}^{B, Tл}$ -состояния в КЯ от величины внешнего магнитного поля B при $E_i = 3$ мэВ, $L = 70$ нм, $U_0 = 0,4$ эВ (U_0 – амплитуда потенциала конфайнмента КЯ), $E = 0$, для различных значений параметров диссипативного туннелирования: 1 – $\varepsilon_L^* = 1, \varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 1$; 2 – $\varepsilon_L^* = 1, \varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 3$; 3 – $\varepsilon_L^* = 1,5, \varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 1$; 4 – $\varepsilon_L^* = 1, \varepsilon_T^* = 3, \varepsilon_C^* = 1$

При построении кривых на рис. 1 использовались формулы для вероятности диссипативного туннелирования во внешнем магнитном поле и во внешнем электрическом поле соответственно, полученные нами ранее в работах [7, 8]. Из рис. 1 видно (сравн. кривые 1 и 2), что с увеличением «вязкости» контактной среды ($\varepsilon_C^* = \hbar\sqrt{C} / E_d$, C – константа взаимодействия с контактной средой) величина $\bar{E}_{\lambda, BE}$ растет из-за уменьшения вероятности диссипативного туннелирования, при этом ширина примесного уровня уменьшается (сравн. кривые 1 и 2 на рис. 3), что связано с ростом времени жизни резонансного состояния. Видно также (см. рис. 1), что в магнитном поле имеет место эффект вымораживания резонансного D^- -состояния в КЯ. Электрическое поле стимулирует распад резонансного D^- -состояния в КЯ в условиях диссипативного туннелирования (см. рис. 2). На рис. 4 приведена зависимость ширины ΔE резонансного примесного уровня от координаты D^- -центра в направлении оси роста КЯ для различных значений параметров диссипативного туннелирования.

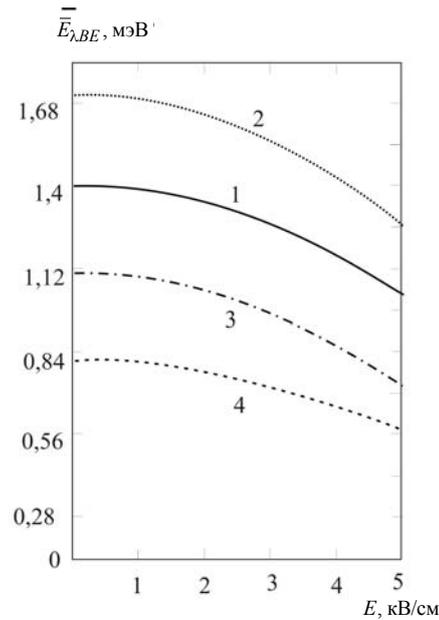


Рис. 2. Зависимость средней энергии связи D^- -состояния в КЯ от величины внешнего электрического поля E при $E_i = 3$ мэВ, $L = 70$ нм, $U_0 = 0,4$ эВ, $B = 0$, для различных значений параметров диссипативного туннелирования: 1 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 1$; 2 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 3$; 3 – $\varepsilon_L^* = 1,5$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 1$; 4 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 3$, $\varepsilon_C^* = 1$

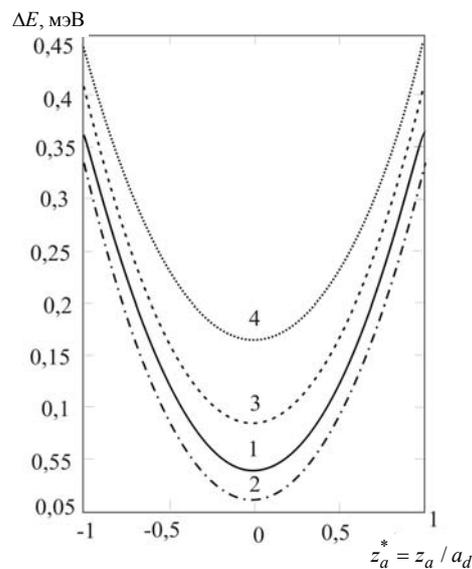


Рис. 3 Зависимость ширины резонансного уровня ΔE от координат $z_a^* = z_a / a_d$ D^- -центра в КЯ при $E_i = 3$ мэВ, $L = 70$ нм, $U_0 = 0,4$ эВ, $B = 3$ Тл, $E = 0$, для различных значений параметров диссипативного туннелирования: 1 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 1$; 2 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 3$; 3 – $\varepsilon_L^* = 1,5$, $\varepsilon_T^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 1$; 4 – $\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_T^* = 3$, $\varepsilon_C^* = 1$

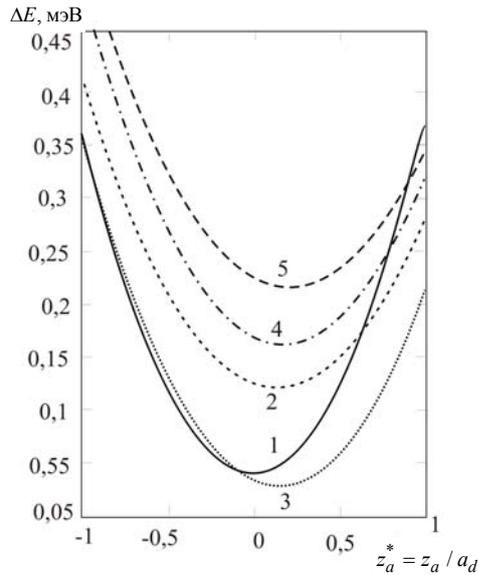


Рис. 4. Зависимость ширины резонансного уровня ΔE от координат $z_a^* = z_a / a_d$ D^- -центра в КЯ при $E_i = 3$ мэВ, $L = 70$ нм, $U_0 = 0,4$ эВ, $E = 3$ кВ/см, $B = 0$, для различных значений ϵ_L^* , ϵ_T^* , ϵ_C^* : 1 – $\epsilon_L^* = 1$, $\epsilon_T^* = 1$, $\epsilon_C^* = 1$ ($E = 0$); 2 – $\epsilon_L^* = 1$, $\epsilon_T^* = 1$, $\epsilon_C^* = 1$; 3 – $\epsilon_L^* = 1$, $\epsilon_T^* = 1$, $\epsilon_C^* = 3$; 4 – $\epsilon_L^* = 1,5$, $\epsilon_T^* = 1$, $\epsilon_C^* = 1$; 5 – $\epsilon_L^* = 1$, $\epsilon_T^* = 3$, $\epsilon_C^* = 1$

Из рис. 3 и 4 видно, что наименьшее время жизни имеют резонансные D^- -состояния, соответствующие D^- -центрам, расположенным вблизи границ КЯ. С ростом температуры (параметр $\epsilon_T^* = kT / E_d$) и частоты фононной моды ($\epsilon_h^* = \hbar\omega_L / E_d$) ширина резонансного уровня увеличивается за счет туннельного распада D^- -состояния (сравн. кривые 1 и 3, 1 и 4 на рис. 3 и кривые 2 и 4, 2 и 5 на рис. 4).

Заключение

Методом потенциала нулевого радиуса в приближении эффективной массы исследованы резонансные D^- -состояния в КЯ во внешних электрическом и магнитном полях с учетом туннельного распада. Теоретический подход основан на рассмотрении квантового туннелирования с диссипацией при наличии взаимодействия с локальной фононной модой среды. Получено дисперсионное уравнение электрона, локализованного на D^- -центре с резонансным примесным уровнем, численный анализ которого позволил исследовать влияние внешних электрического и магнитного полей, а также туннельного распада на среднюю энергию связи и ширину резонансного уровня в КЯ. Показано, что электрическое поле стимулирует распад резонансного примесного состояния в условиях диссипативного туннелирования за счет электронной поляризации и шарковского сдвига энергии. Найдено, что увеличение константы взаимодействия электрона с контактной средой приводит к блокировке туннельного рас-

пада, что обусловлено ростом «вязкости» контактной среды. Показано, что наименьшее время жизни имеют резонансные D^- -состояния, соответствующие D^- -центрам, расположенным вблизи границ КЯ. Найдено, что с ростом температуры и частоты фононной моды ширина резонансного уровня увеличивается за счет роста вероятности диссипативного туннелирования. Показано, что внешнее магнитное поле оказывает стабилизирующее действие на резонансные D^- -состояния в КЯ с параболическим потенциалом конфайнмента.

Список литературы

1. **Алешкин, В. Я.** Примесные резонансные состояния в полупроводниках. Обзор / В. Я. Алешкин, Л. В. Гавриленко, М. А. Однолюбов, И. Н. Ясиевич // Физика и техника полупроводников. – 2008. – Т. 42, № 8. – С. 899–921.
2. **Lazarenkova, O. L.** Proc. 7 th. Int.Symp. Nanostructures: Physics and Technology / O. L. Lazarenkova, A. N. Pikhtin. – St. Petersburg, Russia, 1999. – P. 416.
3. **Пихтин, А. Н.** Влияние внешнего электрического поля на вероятность оптических переходов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs / А. Н. Пихтин, О. С. Комков, К. В. Базаров // Физика и техника полупроводников. – 2006. – Т. 40, № 5. – С. 608–613.
4. **Пахомов, А. А.** Локальные электронные состояния в полупроводниковых квантовых ямах / А. А. Пахомов, К. В. Халипов, И. Н. Ясиевич // Физика и техника полупроводников. – 1996. – Т. 30, № 8. – С. 1387–1394.
5. **Huant, S.** Two-Dimensional D^- Centers / S. Huant, S. P. Najda, B. Etienne // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 65, № 12. – P. 1486–1489.
6. **Huant, S.** Well-width Dependence of D^- Cyclotron Resonance in Quantum Wells / S. Huant, S. P. A. Mandray, J. Zhu et al. // Phys. Rev. B. – 1993. – V. 48, № 4. – P. 2370–2375.
7. **Кревчик, В. Д.** Резонансные состояния доноров в квантовых молекулах во внешнем электрическом поле / В. Д. Кревчик, Е. Н. Калинин, З. А. Гаврина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 131–140.
8. **Кревчик, В. Д.** Влияние магнитного поля на оптические свойства квантовых молекул с резонансными донорными состояниями / В. Д. Кревчик, А. В. Калинина, Е. Н. Калинин, М. Б. Семенов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 91–109.

Кревчик Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of physics, Penza State University

Разумов Алексей Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра физики,
Пензенский государственный
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

Razumov Aleksey Viktorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of physics,
Penza State University

Козенко Сергей Евгеньевич
аспирант, Пензенский
государственный университет
E-mail: physics@pnzgu.ru

Kozenko Sergey Evgenyevich
Postgraduate student,
Penza State University

Рудин Вадим Александрович
аспирант, Пензенский
государственный университет
E-mail: physics@pnzgu.ru

Rudin Vadim Alexandrovich
Postgraduate student,
Penza State University

УДК 539.23; 539.216.1; 537.311.322.

Кревчик, В. Д.

Резонансные состояния доноров в квантовых ямах во внешних электрическом и магнитном полях / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, С. Е. Козенко, В. А. Рудин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 145–154.

УДК 539.23: 538.9

И. А. Аверин, А. А. Карманов,
В. А. Мошников, Р. М. Печерская, И. А. Пронин

ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА И ИССЛЕДОВАНИЯ НАНОКОМПОЗИТНЫХ ПЛЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ-ТЕХНОЛОГИИ¹

Аннотация. Рассмотрены условия, влияющие на поликонденсацию в золь-гель-процессе. Выявлена корреляция между морфологией поверхности пленок и условиями их синтеза. Предложено исследование растворов золь и пленок на их основе методом ИК-Фурье спектроскопии.

Ключевые слова: золь-гель-технология, перколяция, газовый сенсор, ИК-Фурье спектроскопия.

Abstract. The article considers conditions influencing polycondensation in sol-gel processes. The authors have revealed a correlation between film surface morphology and their synthesis conditions. It is suggested to investigate sol and film solution on their basis by infrared Fourier spectroscopy.

Key words: sol-gel technology, percolation, gas sensor, infrared Fourier spectroscopy.

В последние годы наноструктурированные пленки исследуются как перспективные материалы для создания газовых сенсоров адсорбционного типа, принцип действия которых основан на изменении электропроводности материала под действием восстанавливающих газов. Нанотехнологии позволяют создавать газовые сенсоры нового поколения с улучшенными характеристиками (чувствительность и селективность). С помощью золь-гель-технологии возможно создание газочувствительных пленок с системой пор разного рода [1]. Они включают в себя как квазиупорядоченную систему на поверхности, так и разветвленную пористую 3D-структуру (рис. 1).

Размеры пор на поверхности пленок зависят от многих факторов: тип и концентрация растворителя, температура и время отжига и др. Определяющее воздействие на процессы газочувствительности оказывают поры в ветвях трехмерных композитов, сформированные иерархическими структурами, которые, как правило, не доходят до перколяционного стягивающего кластера. Основной вклад в развитость поверхности вносят мезо- и микропоры, размер которых составляет менее 10 нм [2]. Все они вне чувствительности атомно-силовой микроскопии (АСМ), хотя и являются определяющими процессов газочувствительности. Поэтому представляет интерес оценка пористости и управления размерами пор в рамках упрощенной модели Смолуховского.

Цель работы – оценка факторов (вязкость, время и температура отжига) на процессы регулярной сборки фракталов, на основе исследований пленок методом ИК-Фурье спектроскопии.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», мероприятие 1.4.

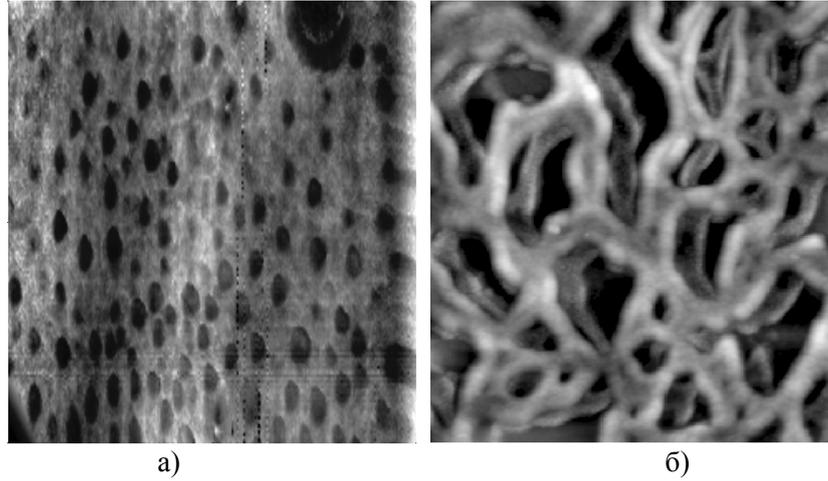


Рис. 1. Поры на поверхности золь-гель-компози́тов: а – квазиупорядоченная система пор на поверхности пленок; б – трехмерный сетчатый компози́т

М. Смолуховским разработана теория быстрой коагуляции, кинетика которой при начальной концентрации частиц золя c_0 определяется соотношением [3]

$$-\frac{dc}{d\tau} = \xi c_0^2,$$

где $-\frac{dc}{d\tau}$ – скорость коагуляции; ξ – константа скорости коагуляции, зависящая от коэффициента диффузии, для температуры T и вязкости η определяется из уравнения

$$\xi = \frac{8kT}{3\eta},$$

где k – постоянная Больцмана. Соотношение Эйнштейна связывает вязкость коллоидного раствора η с его концентрацией c [4]:

$$\eta = \eta_0(1 + \alpha c),$$

где η_0 – вязкость дисперсионной среды; $\alpha = 2,5$ – константа для частиц сферической формы.

С учетом поправки на вязкость уравнение Смолуховского примет вид

$$-\frac{dc}{d\tau} = \frac{2kTc_0}{3\eta_0(1 + \alpha c)}.$$

Его решение – функция:

$$c(\tau, T) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + 2\alpha A(\tau, T)} - 1 \right),$$

где

$$A(\tau, T) = \frac{\alpha c_0^2}{2} \varepsilon + c_0 \varepsilon_1 - \frac{8kc_0}{3\eta_0} \varepsilon_2 T \tau;$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – размерные коэффициенты.

С учетом того, что $\frac{c_0}{c}$ определяет среднее число молекул в кластере n , перепишем последнее уравнение в виде

$$n(\tau, T) = \frac{\alpha c_0}{\sqrt{1 + 2\alpha A(\tau, T)} - 1}. \quad (1)$$

Наиболее подходящим для моделирования полученной морфоструктуры является трехмерный фрактал Жюльена, на каждом этапе фрактализации которого не происходит перехода к следующему этапу до сферизации предыдущего.

Промоделируем сборку фрактальных агрегатов типа фрактала Жюльена с учетом решения уравнения Смолуховского [5]. В трехмерном фрактале Жюльена содержится $\zeta = 13$ составных частиц, причем коэффициент роста диаметра агрегата при последующей итерации будет составляет $\chi = 3$. После p итераций в агрегате содержится $n = \zeta^p$ частиц, а его радиус составляет $r = \delta \chi^p$ при радиусе одной частицы δ . Тогда радиус агрегата в зависимости от числа частиц в нем будет иметь вид

$$r = \delta \chi^{\frac{\ln(n)}{\ln(\zeta)}}.$$

С учетом (1) получим

$$r(\tau, T) = \delta \chi^{\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha c_0}{\sqrt{1 + 2\alpha A(\tau, T)} - 1} \right)}{\ln(\zeta)} \right)}. \quad (2)$$

Из уравнения (1) вытекает, что скорость коагуляции обратно пропорциональна динамической вязкости дисперсионной среды. Для экспериментального подтверждения закономерности проведен ряд экспериментов. Исследованы однокомпонентные системы на основе SiO_2 , в качестве растворителей использованы простые спирты. На рис. 2 представлены изображения поверхностей пленок, полученных методом атомно-силовой микроскопии.

Видно, что с ростом вязкости дисперсионной среды размеры кластеров уменьшаются, как и дисперсия их распределения по размерам [6].

Еще один важный фактор, влияющий на морфологию поверхности пленок до их отжига, – это время созревания золя. Из зависимости (1) следует, что радиус кластера подчиняется закону $G(\chi^{-1/2})^{\ln(\tau)}$, где G – некоторая константа. Результирующая кривая зависимости близка к гиперболе. Значит, в первые минуты коагуляции процесс роста кластеров будет идти очень быстро, а в последующее время – замедленно.

Этот факт отражен на рис. 3, где показана морфоструктура пленок, созревавших в течение одного часа и одних суток после реакции. Видно, что в течение часа кластеры имеют диаметр порядка 100 нм, а спустя сутки – около 250 нм.

Заключительным этапом формирования газочувствительных пленок является их отжиг. На этой стадии полимерные пленки превращаются в силикатные, гидроксиды и соли металлов-допантов переходят в оксиды [7].

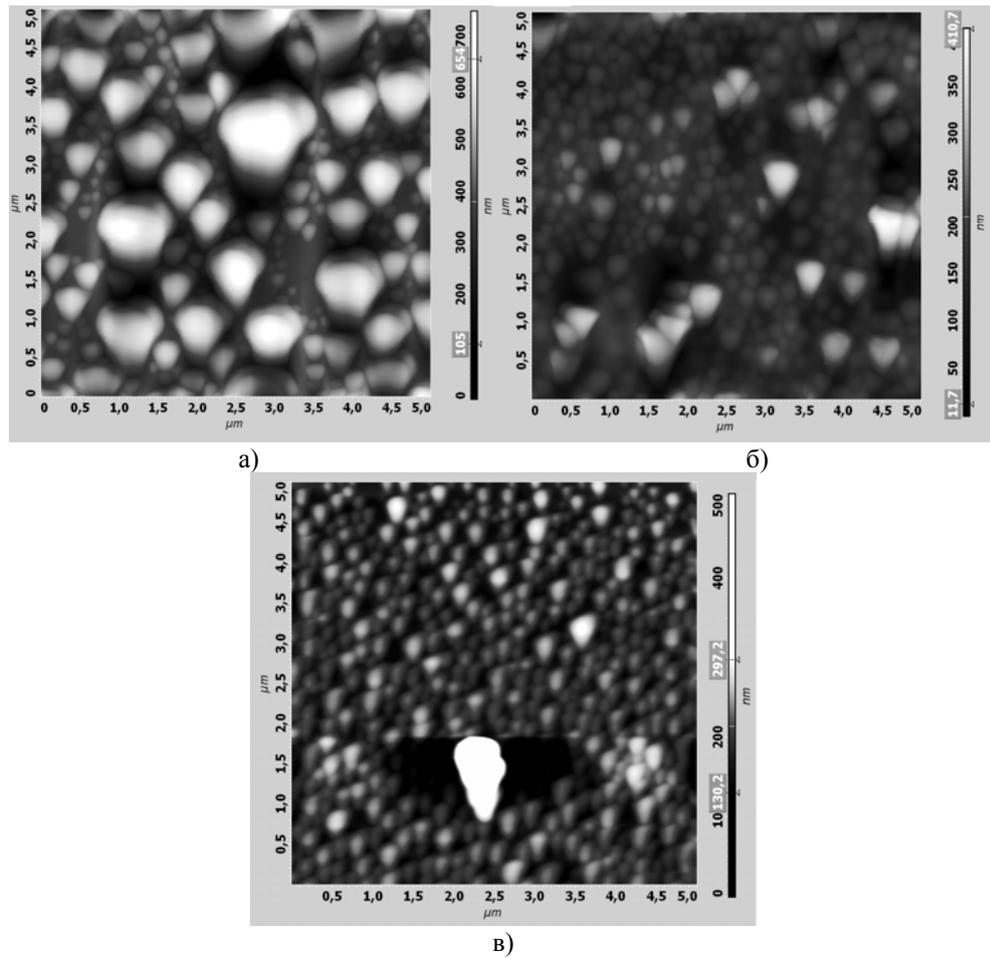


Рис. 2. Морфоструктура поверхностей пленок, полученных при использовании различных растворителей: а – система тетраэтоксисилан – этанол; б – система тетраэтоксисилан–бутанол-1; в – система тетраэтоксисилан–бутанол-2

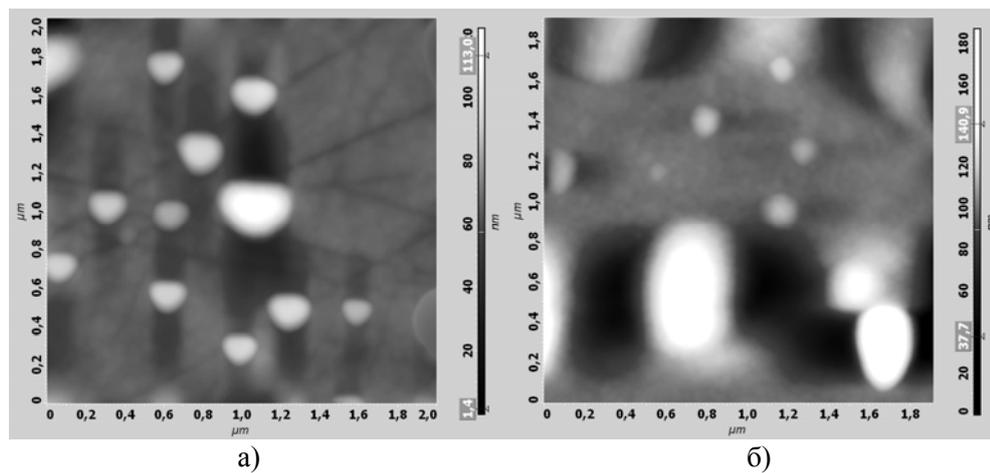


Рис. 3. Морфоструктура пленок при разном времени созревания золя (растворитель – пропанол-2): а – время созревания один час; б – время созревания одни сутки

Именно на этой стадии возможно сформировать структуру, наиболее подходящую для дальнейшего использования пленок. При создании газочувствительных элементов наносенсоров необходимо получить разветвленную мезо- и микропористую структуру с максимальным значением процентной пористости композита.

В общем случае увеличение длительности термообработки пленок способствует уменьшению общей пористости. Пленки становятся более гладкими, их шероховатость падает, поры практически отсутствуют.

В табл. 1 приведены экспериментальные данные по среднему размеру пор на поверхности и общей пористости одно- и двухкомпонентных золь-гель-композитов в зависимости от температуры их отжига.

Таблица 1
Параметры пористости тонких стекловидных пленок от условий отжига

Массовая доля допанта, %	Температура отжига, К	Размер пор, нм	Общая пористость, %
0	600	3...5	50
	700	3...5	20...30
	800	3...5	0,5
15	600	3...5	5
	700	3...5	5
	800	3...5	1
30	600	10...20	20
	700	10...20	10
	800	10...40	5
50	600	20...30	90
	700	30...50	50
	800	30...60	25

Как видно из табл. 1, наибольшей пористостью обладают высоколегированные пленки, причем размер пор на их поверхности увеличивается при интенсивном высокотемпературном отжиге.

Помимо процессов, происходящих в золе при его созревании и синерезисе, важную роль для формирования пленок играет тип подложки. Исследованы три типа подложек – две аморфные (стекло, ситалл) и кристаллическая – кремний КЭФ 0,3 (111) (рис. 4).

Поскольку морфоструктура нанесенных на кристаллические подложки пленок более равномерна и периодична, а распределение кластеров по размерам имеет меньшую дисперсию, предпочтительно использовать их.

Из рис. 5 видно, что ИК-спектр пропускания исследуемого образца содержит несколько характерных полос поглощения.

Интенсивность излучения, прошедшего через кремний, в полосе поглощения с максимумом 1060 см^{-1} соответствующей валентным колебаниям связей Si-O, выше, чем интенсивность излучения, прошедшего через тонкую стекловидную пленку Si-O, что подтверждает ее развитую поверхность.

ИК-спектр исследуемого образца имеет полосу поглощения с максимумом 2380 см^{-1} , которая соответствует валентным колебаниям связей C-O. В спектре образца присутствует широкая полоса поглощения $3200\text{--}3600\text{ см}^{-1}$, которая соответствует колебаниям O-H группы.

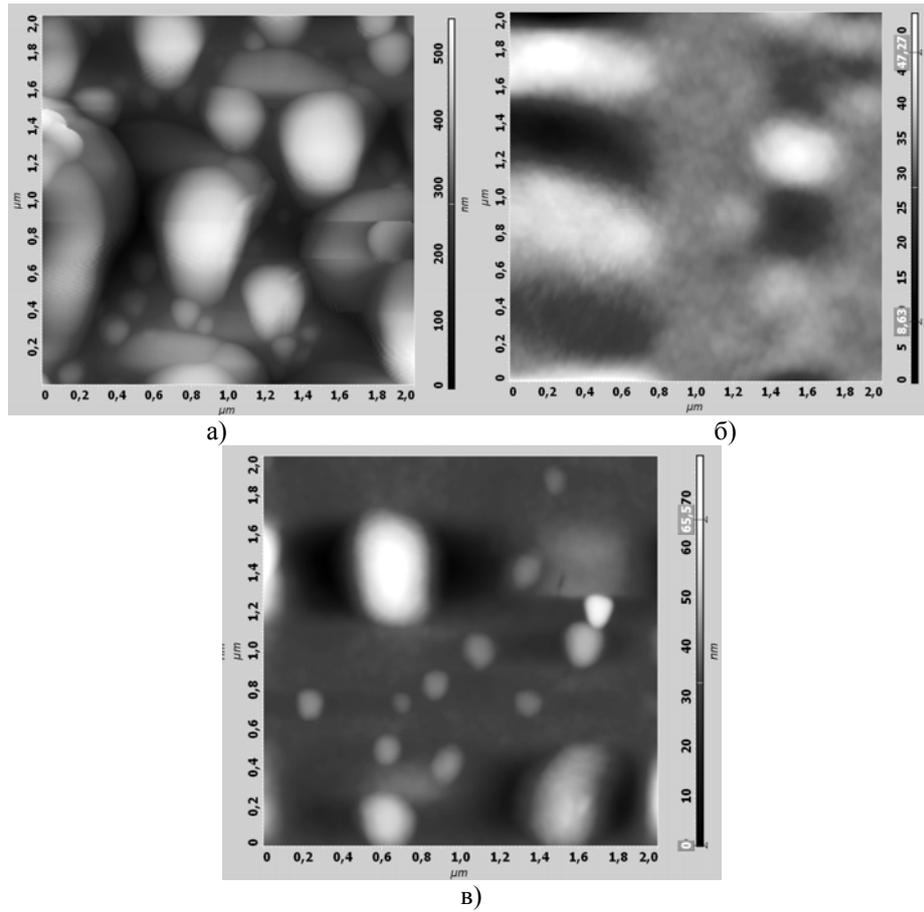


Рис. 4. Морфоструктура пленок, полученных на различных подложках: а – подложка КЭФ 0,3 (111); б – подложка стекло; в – подложка ситалл

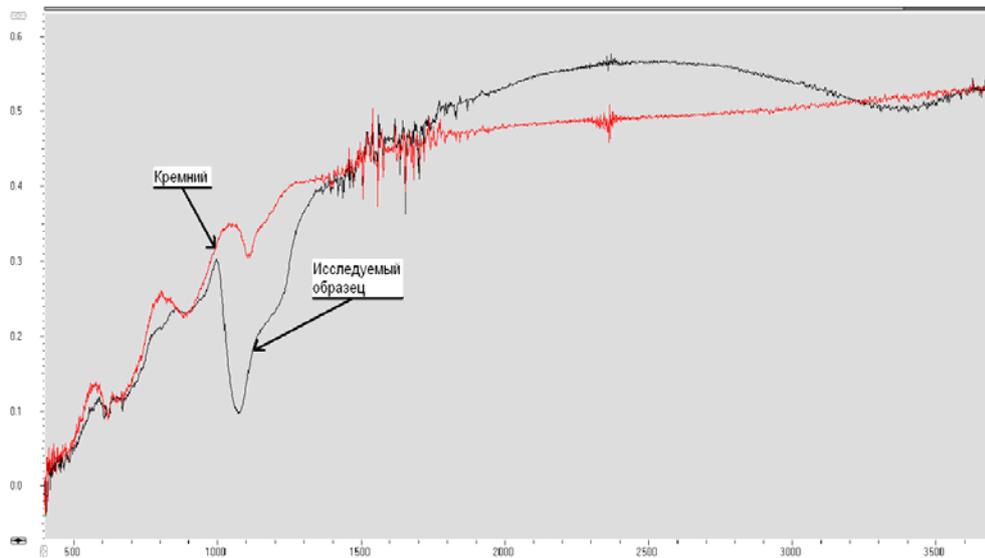


Рис. 5. ИК-спектр пропускания чистого кремния и тонкой стекловидной пленки, нанесенной на поверхность кремния

Наличие данных полос поглощения говорит о том, что исследуемая пленка активно взаимодействует с атмосферой: адсорбируются атомы CO_2 и H_2O . Проведенные исследования показывают, что тонкие пленки SiO_2 на поверхности кремния и стекла, полученные золь-гель-методом, активно взаимодействуют с газовой средой. Это удобно для создания различного рода газочувствительных элементов нового поколения.

Предложенные модели коагуляции и синерезиса тонких стекловидных пленок окиси кремния на основе теорий быстрой коагуляции и фракталов подтверждены результатами экспериментов.

Список литературы

1. **Максимов, А. И.** Основы золь-гель-технологии нанокompозитов / А. И. Максимов, В. А. Мошников и др. – 2-е издание. – СПб. : Элмор, 2008. – 225 с.
2. **Мошников, В. А.** Золь-гель-технология наноструктурированных материалов / В. А. Мошников, О. А. Шилова // Нанотехнология: Физика, процессы, диагностика, приборы ; под ред. В. В. Лучинина, Ю. М. Таирова. – М. : Физматлит, 2006. – С. 205–249.
3. **Жабрев, В. А.** Золь-гель-технология : учеб. пособие / В. А. Жабрев, В. А. Мошников, Ю. М. Таиров, О. А. Шилова. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. – 156 с.
4. Фазовые и структурные превращения в нанокompозитах на основе $\text{SnO}_2 - \text{SiO}_2 - \text{In}_2\text{O}_3$ / И. Е. Грачева, А. И. Максимов, В. А. Мошников, О. Ф. Луцкая // Известия государственного электротехнического университета. Сер. «Физика твердого тела и электроника». – 2006. – Вып. 2. – С. 40–44.
5. **Аверин, И. А.** Полупроводниковые сенсоры с поверхностной многобарьерной квантовой структурой / И. А. Аверин, В. А. Мошников, И. А. Пронин // Университетское образование : сб. ст. XIV Междунар. науч.-метод. конф. (Пенза, 7–8 апреля 2010 г.). – Пенза, 2010. – С. 508–509.
6. Управляемый синтез тонких стекловидных пленок / И. А. Аверин, С. С. Карпова, В. А. Мошников и др. // Нано- и микросистемная техника. – 2011. – № 1. – С. 23–25.
7. **Аверин, И. А.** Особенности низкотемпературной самоорганизации золь на основе двухкомпонентных систем на основе $\text{SiO}_2 - \text{SnO}_2$ / И. А. Аверин, Р. М. Печерская, И. А. Пронин // Нано- и микросистемная техника. – 2011. – № 11. – С. 27–30.

Аверин Игорь Александрович

доктор технических наук, доцент,
заведующий кафедрой нано-
и микроэлектроники, Пензенский
государственный университет

E-mail: micro@pnzgu.ru

Averin Igor Alexandrovich

Doctor of engineering sciences, associate
professor, head of sub-department
of nano- and microelectronics,
Penza State University

Карманов Андрей Андреевич

студент, Пензенский
государственный университет

E-mail: micro@pnzgu.ru

Karmanov Andrey Andreevich

Student, Penza State University

Мошников Вячеслав Алексеевич

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра микроэлектроники,
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»

E-mail: micro@pnzgu.ru

Moshnikov Vyacheslav Alekseevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of microelectronics, Saint-Petersburg State
Electrotechnical University "LETU" named
after V. I. Ulyanov (Lenin)

Печерская Римма Михайловна

доктор технических наук, профессор,
декан факультета естественных наук,
нанотехнологий и радиоэлектроники,
Пензенский государственный
университет

E-mail: micro@pnzgu.ru

Pecherskaya Rimma Mikhaylovna

Doctor of engineering sciences, professor,
dean of the faculty of natural sciences,
nano-technologies and radioelectronics,
Penza State University

Пронин Игорь Александрович

студент, Пензенский
государственный университет

E-mail: micro@pnzgu.ru

Pronin Igor Alexandrovich

Student, Penza State University

УДК 539.23: 538.9

Особенности синтеза и исследования нанокompозитных пленок, полученных методом золь-гель-технологии / И. А. Аверин, А. А. Карманов, В. А. Мошников, Р. М. Печерская, И. А. Пронин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 155–162.

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОЛИМЕР–РАСТВОРИТЕЛЬ

Аннотация. Рассмотрен фазовый состав системы полимер–растворитель, свойственный растворам зольей. Определены области нуклеофильного роста и спиnodального распада системы. Установлены особенности кинетики роста нуклеофильных зародышей.

Ключевые слова: золь-гель-технология, спиnodальный распад, нуклеофильный рост.

Аннотация. The article considers a phase compound of the polymer-solvent system, typical of sol solutions. The authors have determined the areas of nucleophilic growth and system's spinodal decomposition, as well as established kinetic peculiarities of nucleophilic germs growth.

Key words: sol-gel technology, spinodal decomposition, nucleophilic growth.

Продуктами нанотехнологий сегодня являются как 3D-материалы, так и тонкие пленки наноструктурированного композита. Для использования в различных областях необходима самая разнообразная морфология поверхности пленок.

Целью работы является анализ фазового состояния термодинамически неравновесных систем, полученных с помощью золь-гель-технологии.

Как показали результаты экспериментов синтеза золь-гель-композитов, путем варьирования технологических условий возможно получение трехмерных сетчатых композитов, периодической системы пор на поверхности, системы сферических фрактальных кластеров. Два первых типа морфологии композитов – продукт спиnodального распада системы полимер–растворитель, а последний реализуется при распаде системы в области метастабильных состояний – между кривыми спинодали и бинодали.

Все возможные продукты золь-гель-технологии находят широкое применение в нанoeлектронике [1–3]. Так, упорядоченную систему пор на поверхности возможно использовать в качестве контейнеров для био-наноматериалов, систему сферических кластеров – в качестве матрицы, реализующей многобарьерную квантовую структуру. Однако наиболее широкое применение находят трехмерные сетчатые многокомпонентные композиты, являющиеся чувствительным элементом газовых сенсоров нового поколения.

Для создания управляемой технологии синтеза самоорганизующихся фрактальных систем необходимо найти границу областей лабильных и метастабильных фаз, т.е. найти точки на фазовой диаграмме, удовлетворяющие условию

$$\left[\frac{\partial^2 \Delta G^{\text{cm}}}{\partial x^2} \right]_{p,T} = 0,$$

где ΔG^{cm} – энергия Гиббса системы полимер–растворитель; x – мольная доля компонента системы.

Для нахождения уравнения спинодали воспользуемся соотношением

$$\Delta G^{\text{см}} = \Delta H^{\text{см}} - T\Delta S^{\text{см}}.$$

В изотермическом приближении энтальпия смешения не будет зависеть от концентрации полимера в растворе, поэтому ее производная по концентрации будет тождественна нулю. Тогда уравнению геометрического места точек спинодали будет соответствовать выражение

$$-T \frac{\partial^2 S^{\text{см}}}{\partial x^2} = 0.$$

Конфигурационная энтропия определится из соотношения Больцмана $S = k \ln W$, где k – постоянная Больцмана; W – термодинамическая вероятность, определяемая числом микросостояний, которым можно реализовать данное макросостояние системы. Примем, что в растворе полимера в момент времени $\tau = 0$ находятся N молекул растворителя и n молекул полимера, причем эволюция числа молекул полимера определяется решением уравнения Смолуховского:

$$n(\tau) = \nu(c_0 - \xi c_0 \tau),$$

где ν – объем золя; c_0 – начальная концентрация молекул в золе; ξ – константа, определяемая как $\xi = \frac{4kT}{3\eta}$, где ζ – эффективная вероятность соударения коллоидных частиц в золе; η – вязкость золя.

Тогда термодинамическая вероятность W для любого момента времени τ определится выражением

$$W = \frac{(N + n(\tau))!}{N! n(\tau)!}.$$

Используя соотношение Стирлинга $\ln X! = X(\ln X - 1)$, получим

$$W = (N + n(\tau)) \ln(N + n(\tau)) - N \ln(N) - n(\tau) \ln(n(\tau)).$$

Мольная доля полимера в растворе золя в момент времени τ определяется следующим равенством:

$$X = \frac{n(\tau)}{N + n(\tau)}.$$

Тогда математически $n(\tau) = \frac{Nx}{1-x}$, а $\frac{\partial n(\tau)}{\partial x} = \frac{N}{(1-x)^2}$.

Первая производная энтропии по мольной доле полимера выразится в виде

$$\frac{\partial S^{\text{см}}}{\partial x} = \frac{\partial S^{\text{см}}}{\partial n(\tau)} \frac{\partial n(\tau)}{\partial x}.$$

Для условий $\frac{\partial S^{\text{см}}}{\partial n(\tau)} = k[\ln(N + n(\tau)) - \ln(n(\tau))]$ получим

$$\frac{\partial S^{\text{CM}}}{\partial x} = k \ln\left(\frac{1}{x}\right) \frac{N}{(1-x)^2}.$$

Вторая производная от энтропии по мольной доле полимера имеет вид

$$\frac{\partial^2 S^{\text{CM}}}{\partial x^2} = kN \left[\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^2}{(1-x)^3} \right].$$

Тогда уравнение спинодали в неявном виде примет вид

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{2T} = x^2 T - xT.$$

Графически эта зависимость отражена на рис. 1.

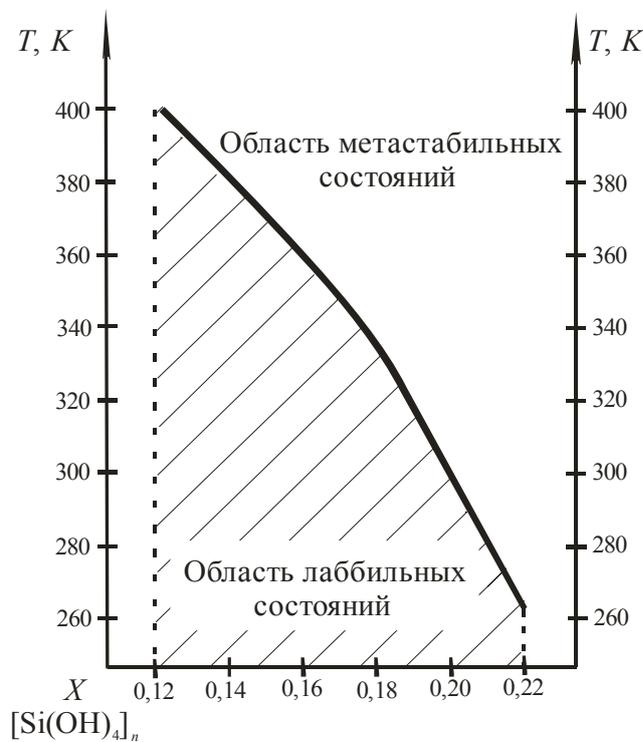


Рис. 1. Геометрическое место точек спинодали

Таким образом, путем варьирования режимов получения золь-гель-материалов возможно формирование пленок различной структуры. На основе теории фракталов и коагуляции возможно найти среднее значение диаметра кластера композита или толщину ветвей перколяционной сетки.

Для исследования влияния условий получения были исследованы образцы, обладающие наиболее типичными свойствами золь-гель-композитов – табл. 1.

Типичные образцы

№ образца	T, K	X	$\tau, ч$
1	340	0,185	5
2	340	0,208	1
3	310	0,208	1
4	310	0,185	5
5	310	0,125	15

Согласно разработанным теоретическим моделям структуры образцов 1–3 отвечают им в области метастабильных состояний, т.е. продуктом коагуляции должна быть система сферических фрактально организованных кластеров. Данное предположение оправдало себя результатами исследований морфоструктуры соответствующих пленок. Исследования морфологии пленочных наноструктур проводились с применением «полуконтактной» колебательной атомно-силовой микроскопической (АСМ) методики. Результаты исследования первых трех образцов представлены на рис. 2.

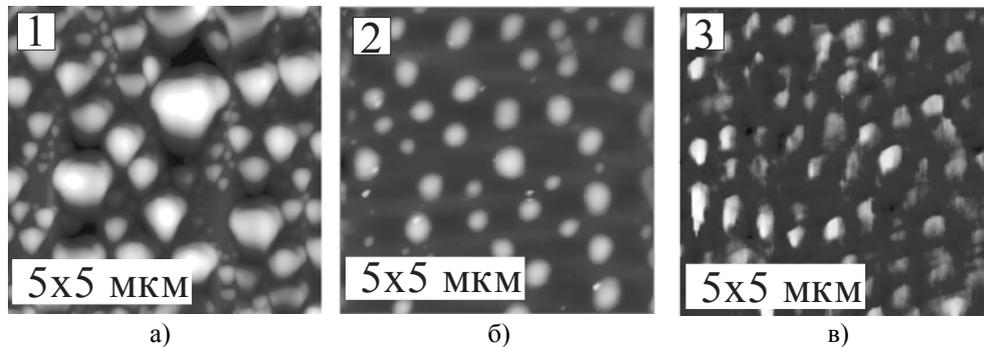


Рис. 2. Морфоструктуры образцов, полученных распадом в области метастабильных фаз: а – 340 К, 5 ч; б – 340 К, 1 ч; в – 310 К, 1 ч

Полученные результаты свидетельствуют о хорошем согласии модельных представлений о распаде растворов полимеров. Однако еще одной важной задачей остается оценка диаметральных размеров полученных кластеров. Для этого воспользуемся моделью быстрой коагуляции Смолуховского в предположении, что ее продуктом является математический фрактал Жюльена. Тогда радиус коллоидной частицы R в момент времени τ будет составлять

$$R(\tau) = \gamma \frac{\ln(1 + \xi c_0 \tau)}{\ln(\theta)},$$

где γ – коэффициент, отражающий, во сколько раз увеличится радиус агрегата при очередной итерации, $\gamma = 3$; θ – коэффициент, равный числу частиц во фрактальном агрегате, $\theta = 13$.

На рис. 3 приведены зависимости, отражающие данное соотношение. Точками на графиках отмечены исследуемые образцы. В табл. 2 приведены экспериментальные и рассчитанные диаметральные размеры фрактальных фигур роста.

Таблица 2

Сравнительные результаты эксперимента и теоретических моделей

№ образца	R экспериментальное, нм	R рассчитанное, нм
1	300	350
2	200	180
3	200	220

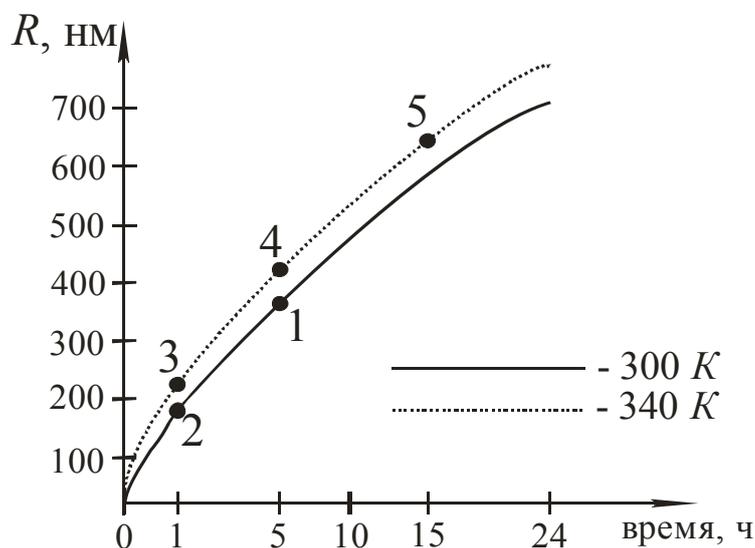


Рис. 3. Зависимость радиуса кластера от времени созревания золя

Как видно из рис. 3 и табл. 2, с вводом поправки эффективной вероятности соударения кинетика эволюции золь-гель-систем подчиняется теории быстрой коагуляции Смолуховского, а выбранный продукт коагуляции — фрактальный агрегат Жюльена — довольно точно описывает истинные композиты.

Рассмотрим типичные образцы, полученные в области лабильных фаз — под куполом бинадвали. Согласно построенным моделям конфигурационная энтропия раствора полимер-растворитель убывает со временем за счет роста фрактальных агрегатов, ведущего к уменьшению термодинамической вероятности W . В некоторый момент времени произведение $T\Delta S^{\text{см}}$ становится больше $\Delta H^{\text{см}}$. Это приводит к тому, что свободная энергия Гиббса смешения становится положительной величиной. Из общих законов термодинамики следует, что при этом должен начаться переход из однофазной системы в двухфазную — спиновальный распад. Система распадается на растворитель и полимер. Из-за принципа минимальной энергии — в данном случае поверхностной — жидкая фаза округляется, собирая вокруг себя фрактальные сферические частицы полимера. При отжиге данной системы жидкая фаза растворителя удаляется, оставляя трехмерный каркас ветвей композита. Полученные ветви не являются сплошными, а устроены иерархическими структурами. Средний диаметр ветви определяется средним размером кластера, сформированного при коагуляции.

На рис. 3 представлены образцы, полученные в области лабильных фаз. Видно, что оба представляют собой перколяционную сетку с разными параметрами. Образец 4 имеет среднюю толщину ветви порядка 300 нм. Предложенная модель коагуляции определяет толщину ветки как равную 400 нм.

Образец 5 созрел в течение 15 ч. Согласно теоретическим моделям в золе первые 3 ч шел один процесс – фрактальная коагуляция. В последующие 12 ч, по всей видимости, протекали два основных процесса – фрактальная коагуляция, обусловившая большое расстояние между порами на поверхности, вплоть до ликвидации 3D-системы, и спинодальный распад, определяющий полученную картину системы пор.

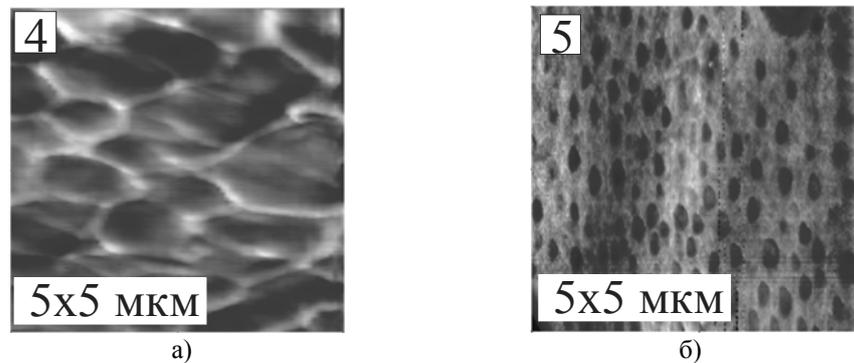


Рис. 4. Морфоструктуры образцов, полученных распадом в области лабильных фаз: а – 310 К, 5 ч; б – 310 К, 15 ч

Таким образом, построенные модели качественно и количественно позволяют предсказать свойства и морфологию наноструктурированных композитов, полученных с помощью золь-гель-технологии.

Список литературы

1. **Максимов, А. И.** Основы золь-гель-технологии нанокompозитов / А. И. Максимов, В. А. Мошников, Ю. М. Таиров, О. А. Шилова. – 2-е издание. – СПб. : Эльмор, 2008. – 225 с.
2. **Жабрев, В. А.** Золь-гель-технология : учеб. пособие / В. А. Жабрев, В. А. Мошников, Ю. М. Таиров, О. А. Шилова. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. – 156 с.
3. **Мошников, В. А.** Золь-гель-технология наноструктурированных материалов / В. А. Мошников, О. А. Шилова // Нанотехнология: Физика, процессы, диагностика, приборы ; под ред. В. В. Лучинина, Ю. М. Таирова. – М. : Физматлит, 2006. – С. 205–249.

Аверин Игорь Александрович
доктор технических наук, доцент,
заведующий кафедрой нано-
и микроэлектроники, Пензенский
государственный университет
E-mail: micro@pnzgu.ru

Averin Igor Alexandrovich
Doctor of engineering sciences, associate
professor, head of sub-department
of nano- and microelectronics,
Penza State University

Пронин Игорь Александрович
студент, Пензенский
государственный университет
E-mail: micro@pnzgu.ru

Pronin Igor Alexandrovich
Student, Penza State University

УДК 539.23

Аверин, И. А.

Особенности фазового состояния неравновесных термодинамических систем полимер-растворитель / И. А. Аверин, И. А. Пронин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 163–169.

ИСТОРИЯ РАДИОФИЗИКИ – ВАЖНЕЙШЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ В ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Аннотация. Рассказано о научном, техническом и гуманитарном потенциалах современной физики на примере одного из ее магистральных направлений – радиофизики. Определены предмет, цели и методы истории радиофизики, разработаны подходы к ее изучению, приведена периодизация этой науки. Обсуждены основные компоненты интегративной модели изучения истории радиофизики, которые можно использовать при рассмотрении истории развития других разделов современной фундаментальной науки.

Ключевые слова: современная физика, история радиофизики, интегративная модель, Нобелевские премии, научные школы в радиофизике.

Abstract. The article reads about scientific, technical and humanitarian potentials of modern physics by the example of its significant component field – radiophysics. The authors determine the subject, the objectives and the methods of radiophysics history, develop the approaches to the study, distinguish main periods of the science. The researchers also discuss the general components of the integrative model of radiophysics history study process, which may as well be applied for investigation of development history of other fields of modern fundamental science.

Key words: modern physics, radiophysics history, integrative model, Nobel prize, radiophysics scientific schools.

*Чтобы понять какую-либо науку,
необходимо знать историю этой науки*

О. Конт

Введение

Накопление огромного количества научных фактов, стремительное развитие наукоемких технологий привели к тому, что современная физика «так разрослась и дифференцировалась, что за деревьями трудно разглядеть лес, трудно охватить мысленным взором картину современной физики как целого» [1]. Современная фундаментальная наука охватывает столь широкий круг проблем, что даже специалистам подчас трудно полностью охватить все ее разделы. Один из творцов квантовой механики Нобелевский лауреат Ю. Вигнер в статье [2], посвященной будущему науки, определил факторы, тормозящие ее развитие. Одним из них является «увеличение пути до переднего края науки, что потребует от будущих исследователей потратить большую часть активной жизни на освоение уже накопленных результатов». Ситуация усугубляется также тем, что физические исследования сегодня часто проводятся на стыке различных наук, что способствует представлению постнеклассической физики в виде своеобразного «куста», а не «ствола» [3]. Лавинообразные потоки информации, мириады научных фактов и открытий размывают предмет и методы постнеклассической физики. Что касается непрофессионалов, интересующихся вопросами современной физики, ситуация для них подобна плаванию в безбрежном океане без маяков и ориенти-

ров. Естественно, такое путешествие нельзя назвать увлекательным, и интерес к проблемам современной физики неумолимо снижается.

На наш взгляд, выходом из этой ситуации является изучение истории развития основополагающих идей современной физики. При этом важно отметить, что современная наука – чрезвычайно математизированная область знаний. И порой только историко-физический подход может пролить свет на происхождение и развитие физических идей. Кроме того, такой подход, избавляясь от излишней математизации научных теорий, позволяет представить современную физику как непрерывно развивающийся, эволюционирующий организм.

Радиофизика как наука

История физики хранит огромное количество событий и фактов, оказавших влияние на формирование наших представлений об окружающем мире, становление и развитие физической науки. При этом история физики представляет собой не просто хронологически упорядоченный набор фактов, но целостную картину возникновения и развития физических идей. Так как современная физика практически необъятна, целесообразно применить историко-физический подход к какому-то ее разделу и экстраполировать полученные результаты на историю развития всей постнеклассической физики. Такой научной дисциплиной может быть радиофизика. Начнем с обсуждения предмета и методов этой науки.

Радиофизика – раздел физики, охватывающий изучение и использование электромагнитных колебаний и волн радиодиапазона: их возбуждение, распространение, прием и преобразование частоты, а также возникающие при этом взаимодействия электрических и магнитных полей с зарядами в вакууме и в веществе [4]. На шкале электромагнитных волн радиодиапазон занимает интервал частот (длин волн): 10^4 – 10^{11} Гц (10^3 – 10^{-4} м), и первоначально радиофизические исследования велись именно в этих границах. Со временем методы радиофизики проникли и в другие диапазоны: от очень низких частот до γ -излучения, а также в область исследований волновых процессов неэлектромагнитной природы (например, в акустику).

Радиофизика охватывает различные области науки и техники, современные технологии, производство, здравоохранение, СМИ и культуру современного цивилизованного общества. В ней неразрывно сочетаются научный, технический и гуманитарный потенциалы современной физики [5].

Научный потенциал. Радиофизика – важнейший источник знаний об окружающем мире. Благодаря появлению таких радиофизических направлений исследований, как радиоспектроскопия, статистическая радиофизика, квантовая радиофизика, микроэлектроника, радиоастрономия и другие был осуществлен стремительный прорыв во многих областях современной науки. Недаром 45 ученых стали лауреатами 21 Нобелевской премии за работы в этой области!

Технический потенциал. Расширяя и многократно умножая возможности человека, радиофизика обеспечивает его уверенное продвижение по пути технического прогресса. Радиофизические открытия являются основой технических устройств (мобильная телефония, лазерные технологии, микроэлектронные устройства и т.д.), определяющих жизнь современного общества.

Радиофизические методы используются во многих областях науки и техники (современные средства связи, исследование космоса, медицина, геология, оборонные технологии и т.д.).

Гуманитарный потенциал. Изучение истории развития радиофизики показывает, что она вносит весомый вклад в развитие духовного облика человека, формирует его научное мировоззрение, учит ориентироваться в шкале культурных ценностей. Изучение истории становления и развития научных взглядов в области радиофизики способствует глубокому пониманию физической сущности рассматриваемых явлений.

Современное общество все больше осознает необходимость формирования у каждого человека целостного научного мировоззрения, которое бы соответствовало последним достижениям фундаментальной науки. Науки о природе развивают менталитет людей, в частности, формируют научный стиль мышления, дефицит которого ощущается в сегодняшнем обществе. Формирование научного стиля мышления невозможно, в частности, без достаточно прочных радиофизических знаний.

Рассмотрим характерные особенности современной физики на примере радиофизики. Начнем с *междисциплинарности научных исследований*, которая предполагает существование взаимосвязи, преемственности, взаимопревращаемости различных объектов, изучаемых в естественных науках. В современной радиофизике междисциплинарность проявляется весьма активно. В качестве примера можно привести томографию, которая одновременно является разделом современной радиофизики, одним из основных методов неинвазивной диагностики и отдельным направлением в области получения и обработки информации. Томографические методы применяют в радиолокации и оптике, в медицине и физиологии, в геофизике и химии, астрономии и исследовании атмосферы и т.д.

Радиофизика играет ведущую роль в разработке и совершенствовании методологии современного физического эксперимента. Анализ этого вопроса свидетельствует об универсальности радиофизических методов – возможности их применения в различных областях науки и техники. В этом отношении радиофизика представляет собой многоликую научную дисциплину, которая сама развивает собственные методы и «экспортирует» их в другие области знаний.

Широкое применение методов вычислительной математики в научных исследованиях кардинально изменило получение и обработку их результатов. Компьютерные технологии становятся неотъемлемой частью любых физических исследований. Не следует забывать, что именно радиофизические изобретения (транзисторы, интегральные схемы, гетероструктуры, устройства на квантовых точках и др.) стали предвестниками наступления компьютерной эры и способствовали формированию информационного общества XXI в.

Усложнение экспериментальной базы. Выдающиеся успехи физики получены с помощью сложных инженерных устройств, действие которых часто основано на недавно открытых физических явлениях, не в последнюю очередь радиофизических. Так, применение методов лазерного охлаждения атомов позволило глубже понять взаимодействие лазерного излучения с веществом и квантовомеханическое поведение газов при сверхнизких температурах. Развитие техники фазированной антенной решетки (ФАР) позволило

решить проблемы СВЧ-микронэлектроники как основы микроминиатюризации СВЧ-компонентов и обеспечения их массового производства.

Индустриализация современных физических исследований приобретает в настоящее время космическое ускорение. Фактически сейчас в макро-, микро- и мегафизике значимые результаты исследований удастся получить только с помощью сложнейших индустриальных установок, в которых всегда присутствует весомая радиофизическая составляющая. В качестве примеров можно привести ряд уникальных радиофизических установок: спутник «СОВЕ», радиотелескоп Аресибо, систему апертурного синтеза VLA и др.

Международная научная кооперация проявляется в том, что в настоящее время практически все крупные научные проекты строятся при финансовой поддержке нескольких государств. Так, в России находится в стадии разработки международный проект «Радиоастрон». В нем предусматривается запуск на эллиптическую орбиту с периодом около 9,5 суток и максимальным удалением от Земли 350 тыс. км 10-метрового космического радиотелескопа. В проекте участвуют обсерватории США, Канады, европейских государств, Китая, Индии и Австралии.

Все вышесказанное позволяет говорить о радиофизике как об одном из наиболее бурно развивающихся направлений в физике и о краеугольном камне современной фундаментальной науки. Однако история этой научной дисциплины исследована явно недостаточно. Отметим, что радиофизика изобилует не только значительными открытиями, но также рядом уникальных научных школ, возглавляемых выдающимися учеными. Так, благодаря работам научных школ Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, М. А. Леонтовича, Е. К. Завойского и других отечественная радиофизика добилась впечатляющих успехов.

История радиофизики как наука

На наш взгляд, уже давно назрела необходимость выделить историю радиофизики в отдельное направление истории физики. Для этого следует определить предмет, цели и методы истории радиофизики, выработать возможные подходы к ее изучению, раскрыть содержание этой науки. Исследования подобного рода до настоящего времени практически не проводились.

Предметом истории радиофизики является история возникновения и развития радиофизики как единой науки, занимающей определенное место в общественной жизни людей и выполняющей в ней определенную роль. Историю радиофизики можно рассматривать и как процесс эволюции ряда фундаментальных понятий и идей этой науки.

Можно выделить три главных аспекта, определяющих предмет истории радиофизики. Во-первых, это *физический аспект*. Для изучения истории радиофизики необходимо иметь естественнонаучное или техническое образование и обладать определенным запасом знаний в области физики. Во-вторых, это *исторический аспект*. Важно не просто знать, но активно использовать методы и принципы истории физики [6] при изучении истории развития магистральных направлений радиофизических исследований, научных биографий творцов радиофизики и т.д. В-третьих, необходимо учитывать *социально-культурный аспект* истории радиофизики. Здесь следует рассмотреть весомый вклад радиофизики в развитие человеческой цивилизации,

Нобелевские премии по радиофизике, многогранные связи радиофизики и других областей науки и техники.

Главной *целью истории радиофизики*, как и любой исторической науки, является накопление и систематизация научных фактов в контексте определенных социокультурных явлений. К этому нужно добавить изучение процесса развития радиофизической науки. Еще одной целью истории радиофизики является исследование закономерностей, следуя которым развивается эта наука. По словам выдающегося советского радиофизика С. М. Рытова, «Представление об истории физики и об ее творцах позволяет лучше понять эволюцию и борьбу идей, позволяет почувствовать динамику науки, внутреннюю логику ее развития лучше, чем знание только добытых результатов» [7]. Развитие радиофизики представляет собой сложный, нелинейный процесс. В нем тесно переплетены внутренние («самодвижение» науки – концепция интернализма) и внешние (социально-экономические явления – концепция экстернализма) факторы развития этой науки. Данные факторы связаны диалектически и обеспечивают эволюцию радиофизики.

Отметим, что развитие есть процесс чередования относительно спокойных (эволюционных) периодов и периодов революционных изменений теорий, понятий, основных принципов и ключевых идей. В эволюционный период физика или какая-либо ее область (в том числе радиофизика) развиваются спокойно. Однако постепенно спокойный этап развития заканчивается, так как непрерывно накапливаются новые научные факты, объяснение которых уже не вписывается в каноны существующей теории. Это приводит к крушению старых принципов. Момент превращения науки из нормальной в «экстраординарную» трактуется Т. Куном [8] как революционный переворот.

Применительно к радиофизике началом научной революции можно считать создание Максвеллом теории электромагнитного поля. Она возникла еще тогда, когда не было экспериментов, опровергающих теорию дальнего действия и указывающих на конечную скорость распространения электромагнитных возмущений. Поэтому для признания данной теории потребовались экспериментальные исследования Герца с электромагнитными волнами. После этого гипотеза Максвелла о существовании электромагнитных волн превратилась в теорию электромагнитных волн, а представления Фарадея о существовании электрических и магнитных полей как физической реальности получили экспериментальное подтверждение.

Указанные выше цели истории радиофизики будут так или иначе преследоваться при изложении материала. К ним, однако, следует добавить еще одну цель – педагогическую. К ней мы вернемся в конце статьи.

Как любая историческая наука, история радиофизики использует специфические *методы исследования*: исследование источников (первичных и вторичных), моделирование исторически значимых экспериментов, статистический метод, метод интервью, компьютерный метод (в отличие от традиционных учебников и пособий, электронные учебные издания позволяют создавать достаточно большие массивы исторической информации по всему комплексу направлений развития физической науки).

Конечно, данные методы не могут считаться абсолютно строгими, но они позволяют получить приближенную картину развития науки и ее отдельных отраслей, а также стать основой для составления футурологических прогнозов.

Одной из важнейших проблем в истории науки является ее *периодизация*, которая позволяет лучше понять эволюцию основополагающих научных идей и методов, тенденции развития, движущие факторы, поворотные (бифуркационные) моменты, практические применения и социальные последствия. В развитии радиофизики можно выделить *три этапа*.

1. **Этап предистории радиофизики (середина XIX в. – 1930-е гг.)**. Здесь речь идет о творцах электромагнитной теории поля (М. Фарадее, Дж. К. Максвелле, Г. Герце, О. Хевисайде, П. Н. Лебедеве, Н. А. Умове, Дж. Г. Пойнтинге и др.), пионерских исследованиях в области электросвязи гениальных дилетантов и ученых (М. Лумис, Д. Хьюз, А. Долбэр, А. Риги, Э. Томсон и др.), основополагающих работах по беспроволочной телеграфии (А. С. Попов, Г. Маркони, К. Ф. Браун и др.).

2. **Этап зарождения и становления радиофизики как науки (1930–1940-е гг.)**. На первом этапе развитие радиофизики опиралось на электродинамику, общую теорию колебаний и волн, электронику. Охарактеризуем эти научные направления [4].

Электродинамика, в основе которой лежит электромагнитная теория Максвелла, обеспечила понимание процессов излучения, распространения и приема радиоволн.

Теория колебаний создала математический аппарат, позволяющий исследовать и управлять процессами в колебательных системах. Важную роль сыграли исследования нелинейных колебаний (и особенно автоколебаний).

Электроника – наука о взаимодействии электронов с электромагнитными полями и о методах создания электронных приборов и устройств, в которых это взаимодействие используется.

Итак, радиофизика, по меткому выражению В. И. Гапонова, «держится на трех китах: теории колебаний, электродинамике и электронике» [9].

Зарождение и становление радиофизики как науки предопределилось развитием радиотехники, в истории которой можно выделить несколько этапов. Первый из них – искровая радиотехника – начинается непосредственно с изобретения радиоприемника и создания систем радиосвязи. Начальным пунктом второго этапа следует считать создание в 1907 г. американским радиотехником Л. де Форестом электронной лампы – триода, внедрению которого в американскую промышленность и радиотехнику способствовал сам изобретатель. Вторая мировая война стимулировала развитие микроволновой радиотехники и полупроводниковой электроники – третий этап в истории радиотехники.

3. **Этап дифференциации и интеграции радиофизической науки (с 1950-х гг. до настоящего времени)**. Проникая во многие разделы физики, радиофизика вносит туда, кроме экспериментальной методики, радиофизические представления. Радиофизический язык и терминология все глубже проникают в общезначимую терминологию, создавая весьма удобный и вносящий большую ясность во многие вопросы «интернациональный язык теории колебаний» (формулировка Л. И. Мандельштама), т.е. единый подход ко всем колебательным явлениям.

В результате взаимных обменов с другими областями физики, с одной стороны, и обособления отдельных разделов – с другой, внутри радиофизики образовалось несколько важных «дочерних» направлений исследований: ста-

тистическая радиофизика, квантовая радиофизика (квантовая электроника), радиоспектроскопия, радиоастрономия, микроэлектроника и др. Из приведенного перечня весьма затруднительно определить собственно предмет радиофизики. Согласно С. М. Рытову, целесообразно выделить те направления, которые позволяют уточнить предмет радиофизики на каждом этапе ее развития [10]. Предполагается, что радиофизика охватывает в основном два таких направления:

1. Изучение физических явлений, существенных для радиофизики, т.е. для всех основных этапов радиосвязи – генерация электромагнитных сигналов, излучение и распространение электромагнитных волн, прием радиосигналов. Это направление можно назвать «*физикой для радио*».

2. Применение радиофизических методов в различных областях физики, астрономии, химии и др. Это направление может быть охарактеризовано как «*радио для физики*».

Таким образом, развитие радиофизики сопровождается открытием новых явлений, находящихся практическое применение и составляющих основу ее новых разделов. При этом некоторые разделы радиофизики выделяются в самостоятельные области физики (радиоастрономия, радиоспектроскопия и др.), где методы радиофизики служат лишь средством изучения явлений, лежащих за пределами радиофизики.

Выдающийся немецкий ученый, Нобелевский лауреат М. фон Лауэ писал: «История может быть написана с различных точек зрения при полном сохранении достоверности. Оправданной является любая точка зрения, исходя из которой, историк может открыть что-либо исторически интересное» [11]. В связи с этим целесообразно выделить ряд подходов к изучению истории радиофизики. Вооружившись ими, историк науки сможет грамотно приступить к исследованию процесса развития радиофизики.

Исторические опыты в радиофизике. В радиофизике можно выделить ряд исторических (фундаментальных) экспериментов, оказавших основополагающее влияние на становление и развитие этой науки. К ним можно отнести:

– фундаментальные исследования и изобретения Г. Герца, доказавшие справедливость теории электромагнитного поля Дж. К. Максвелла;

– экспериментальные работы А. С. Попова, Г. Маркони и К. Ф. Брауна, заложившие основы беспроводной телеграфии и радиосвязи;

– опыты Е. К. Завойского по обнаружению и исследованию электронного парамагнитного резонанса (ЭПР);

– экспериментальные исследования У. Лэмба процессов поглощения и испускания микроволнового излучения атомами, и работы П. Куша по измерению магнитного момента электрона, которые послужили эмпирическим базисом квантовой электродинамики – магистрального направления современной физики элементарных частиц;

– экспериментальные исследования А. М. Прохорова, Н. Г. Басова и Ч. Таунса по созданию малошумящих квантовых усилителей и генераторов радиодиапазона (мазеров) и оптического диапазона (лазеров) и др.

Научные биографии творцов радиофизики. Знакомство с биографическими данными выдающихся ученых естественно вызывает интерес к их научной деятельности. Недаром Дж. Максвелл писал: «Наука захватывает нас тогда, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начи-

наем следить за историей их открытий» [7]. Условно можно выделить следующие факторы, влияющие на научную деятельность ученых: случайность и закономерность открытия, научная смелость и подвиг ученого, приоритет в открытии. Рассмотрим эти факторы, опираясь на примеры из радиофизики.

Случайность и закономерность открытия. Здесь удобно использовать историю открытия ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Первые сигналы, ЯМР были независимо получены исследовательскими группами Ф. Блоха в Оксфорде и Э. Перселла в Гарварде. После длительных бесплодных попыток обнаружить сигнал, Перселл решил, что ожидаемое явление не наблюдается, и дал указание выключить ток, питающий электромагнит. Пока магнитное поле уменьшалось, экспериментаторы продолжали смотреть на экран осциллографа. В некоторый момент магнитное поле достигло необходимой для резонанса величины и на экране неожиданно появился сигнал ЯМР. Таким образом, удачное стечение обстоятельств позволило экспериментально обнаружить физический эффект [12]. С этого момента техника ЯМР начала бурно развиваться и получила широкое применение в физике конденсированного состояния, химии, биологии, метрологии, медицине.

В истории радиофизики есть открытия, которые являются закономерным результатом долгих и кропотливых научных исследований. В начале 1930-х гг. темой экспериментальных работ И. Раби, по его словам, было «проигрывание различных вариантов с использованием оригинальной установки Штерна» [13]. Во многом благодаря работам по измерению магнитных моментов нейтрона и дейтрона у Раби возникла гениальная идея использовать дополнительное периодическое магнитное поле, частота которого может варьироваться с высокой точностью. Последующие исследования Раби и его учеников, использующих эту идею, заложили фундамент радиоспектроскопии – нового направления в радиофизике.

Научная смелость и подвиг ученого. В начальный период работы Нижегородской радиолоборатории параллельно с разработкой приемно-усилительных электронных ламп проводились широкие исследования по созданию надежных методов радиотелефонирования. В марте 1920 г. правительство поручило Нижегородской радиолоборатории «изготовить в срочном порядке центральную радиотелефонную станцию с радиусом действия 2000 верст». Изготовление мощной генераторной лампы для нее казалось тогда неразрешимой задачей. Нужен был тугоплавкий анод из тантала или молибдена, но таких металлов в России не было. В условиях невиданных трудностей, испытываемых страной, М. А. Бонч-Бруевичу удалось найти удивительно смелое и оригинальное техническое решение. Он предложил охлаждаемый водой анод из меди. Такая конструкция позволила рассеивать мощность до 950 Вт, что вполне соответствовало требованиям радиотелефонной передачи.

Приоритет в открытии. Кратко обсудим ставший уже хрестоматийным вопрос о приоритете в изобретении радио. По словам Л. И. Мандельштама, «настоящим изобретателем можно считать того, кто дал идее конкретное осуществление... после чьих работ не остается сомнения в том, что поставленная практическая цель достигнута» [14]. К работе А. С. Попова это относится в полной мере, так как он впервые дал техническое решение, вполне пригодное для радиосвязи. Согласно положениям изобретательского права входящие в устройство Попова известные ранее элементы нельзя трак-

товать как прототипы, так как именно их совокупность позволила создать первый радиоприемник.

Хотя Маркони нельзя считать изобретателем радио, бесспорны его заслуги в последующем увеличении дальности передачи сигналов, освоении промышленного производства радиоаппаратуры.

История изобретения радиофизических методов, приборов и устройств. По мере развития радиофизики ее методы (например: радиотехнические методы, радиолокационный метод, резонансные методы исследования вещества, радиоинтерференционный метод, томографический метод др.) стали проникать в другие области физики. Возник и обратный процесс взаимодействия. Новые задачи, а также освоение высокочастотных диапазонов привлекли в радиофизику идеи и методы из других областей физики, в частности из оптики, что привело к появлению нового раздела радиофизики – квазиоптики. В свою очередь, радиофизические методы, проникнув в оптику, заметно расширили возможности последней, вызвав к жизни такие разделы, как волоконная оптика, голография, интегральная оптика и др., так что и оптический диапазон частот стал областью приложения методов радиофизики. Иногда это поясняют термином «радиооптика».

Радиофизические приборы и методы исследования революционизировали экспериментальную технику, что позволило достичь выдающихся результатов во многих областях современной физики.

Научные школы в радиофизике. В СССР сформировались уникальные в мировой практике сообщества – научные школы. Эти школы, как правило, возглавлялись выдающимися учеными, вокруг которых формировался устойчивый коллектив единомышленников, способный решать крупные общественно значимые задачи [15]. Кратко охарактеризуем некоторые наиболее яркие отечественные и зарубежные радиофизические школы.

Нижегородская радиолaborатория (НРЛ). Научно-исследовательская деятельность НРЛ заложила основы радиосвязи, радиотехники, электроники, радиовещания отечественной радио- и электронной промышленности и получила высокую оценку и признание как в нашей стране, так и за рубежом. В НРЛ были собраны первоклассные специалисты: М. А. Бонч-Бруевич, В. К. Лебединский, А. Ф. Шорин, Д. А. Рожанский, В. П. Вологдин, братья Б. А. и Г. А. Остроумовы, А. М. Кугушев, А. А. Пистолькорс, О. В. Лосев, С. И. Шапошников и др. Кроме того, наездами – на дважды проведенных конгрессах Ассоциации физиков – бывали В. А. Стеклов, Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, О. Д. Хвольсон и др.

После открытия НРЛ в 1918 г. радиотехнические центры возникают и в других городах России. Так, в 1919 г. М. В. Шулейкин основывает при Высшем техническом училище (ныне Московский энергетический институт) кафедру радиотехники. В 1920 г. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси организуют подобный же центр в Одессе, а А. А. Чернышев – радиолaborаторию в Ленинграде при Политехническом институте. С 1923 г. в Ленинграде возникает Центральная радиолaborатория при участии Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, Д. А. Рожанского, М. А. Бонч-Бруевича, В. П. Вологодина и др. В 1923 г. в Ленинграде создается крупный центр – Центральная радиолaborатория (ЦРЛ).

Радиотехническая школа И. Г. Фреймана. Иммануил Георгиевич Фрейман является одним из основателей отечественной радиотехники. Его важнейшая

заслуга – создание крупнейшей в СССР научной радиотехнической школы, давшей мощный импульс к развитию практически всех основных разделов этой науки. Имена выдающихся учеников Иманта Георгиевича широко известны. Это – академик А. И. Берг, внесший огромный вклад в развитие методов расчета мощных усилительных трактов, крупный организатор науки, основатель Военно-морского НИИ связи (НИМИСТ), Института радиотехники и электроники (ИРЭ) АН СССР; академик А. А. Харкевич – специалист в области электроакустики, радиотехники и теории связи, основатель Института проблем передачи информации (ИППИ) АН СССР; академик А. Н. Щукин – выдающийся ученый в области распространения радиоволн, организатор военной науки; член-корреспондент АН СССР С. Я. Соколов – крупнейший ученый в области акустики, гидроакустики, получивший мировое признание в области методов неразрушающего контроля; член-корреспондент АН СССР В. И. Сифоров – выдающийся отечественный ученый в области радиоприемной техники и теории связи; профессор Б. П. Асеев – разработчик специальной аппаратуры, автор фундаментальных курсов по радиотехнике и многие другие известные отечественные радиотехники.

Научная школа Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. В области теории колебаний, значение которой для физики и техники выходит далеко за пределы радиотехники, были достигнуты столь значительные успехи, что полученные в этой области результаты можно с полным правом отнести к числу наиболее ярких достижений советской физики. Выдающуюся роль в этих достижениях сыграли работы Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и их научной школы. Начатые еще в Страсбурге, они первоначально относились к линейным колебательным системам. Однако с началом использования в радиоприемных и радиопередающих устройствах электронных ламп в радиотехнике начинают интенсивно изучаться явления генерации незатухающих колебаний, которые линейная теория описать уже не могла. Это привело к возникновению учения о нелинейных колебаниях.

Талант крупного ученого и педагога, богатство мыслей и идей, личные качества привлекали к Мандельштаму творческую молодежь и привели к созданию им большой научной школы. В нее вошли талантливые молодые ученые, аспиранты и студенты: А. А. Андронов, А. А. Витт, Г. С. Горелик, М. А. Дивильковский, Г. Д. Малюжинец, В. В. Мигулин, С. М. Рыгов, П. А. Рязин, С. П. Стрелков, К. Ф. Теодорчик, М. И. Филиппов, С. Э. Хайкин (теория колебаний), Г. С. Ландсберг, П. А. Бажулин (оптика), М. А. Леонтович, И. Е. Тамм, С. П. Шубин (теоретическая физика), И. М. Борушко, К. Э. Виллер, В. П. Гуляев, Э. М. Рубчинский, Е. Я. Щеголев (радиофизика), М. А. Исакович (молекулярная физика) и др.

Вдохновляемая идеями Мандельштама школа творчески развила созданные им направления в физике и технике и инициировала новые, а его ученики – И. Е. Тамм, А. А. Андронов и М. А. Леонтович – создали собственные широко известные научные школы.

Нижегородская школа радиофизики. В 1931 г. А. А. Андронов вместе с женой Е. А. Леонтович переехал на постоянное жительство из Москвы в Нижний Новгород (г. Горький). В это же время сюда приехали М. Т. Грехова и В. И. Гапонов. Причин для переезда молодых московских физиков было много, в том числе искренняя забота о развитии отечественной науки и

стремление создать подлинный научный центр в провинции. В 1937 г. к ним присоединился Г. С. Горелик.

Вскоре вокруг А. А. Андропова сплотилась группа молодых ученых и преподавателей – Г. С. Горелик, С. М. Рытов, А. Г. Майер, Н. Н. Баутин, И. Л. Берштейн и др. В созданной им творческой атмосфере не могла не развиваться серьезная, настоящая наука. В 1945 г. в Горьковском государственном университете (ГГУ) благодаря усилиям А. А. Андропова, М. Т. Греховой, Г. С. Горелика был создан первый в стране радиофизический факультет. А. А. Андронов возглавил кафедру теории колебаний и автоматического регулирования. Научной базой подготовки студентов был Горьковский исследовательский физико-технический институт (ГИФТИ), а впоследствии – Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ, с 1956 г.), Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК, с 1964 г.) и НИИ механики (с 1974 г.).

Впоследствии НИРФИ разделился, и новый академический Институт прикладной физики (ИПФ) возглавил А. В. Гапонов-Грехов, а спустя годы отпочковавшийся от ИПФ Институт физики микроструктур РАН – С. В. Гапонов. История нижегородской школы радиофизики, которую называют одной из динамично развивающихся научных школ России, тесно связана с двумя поколениями ученых из этой талантливой семьи [16].

Научная школа по нелинейной динамике Д. И. Трубецкого. В середине 70-х гг. прошлого века группой молодых научных работников под руководством Д. И. Трубецкого были начаты исследования, охватывающие широкий круг нелинейных и нестационарных явлений [17]. Одним из первых результатов, полученных Д. И. Трубецким, стало создание нестационарной нелинейной теории электронных приборов с распределенным взаимодействием. С начала 1980-х гг. одним из основных направлений научной школы Трубецкого становятся исследования в области нелинейной динамики. Кроме того, Д. И. Трубецков является одним из неформальных лидеров такого нового научного направления, как синергетика. Серьезным успехом в этом направлении стало издание первой монографии в России, посвященной применению методов нелинейной динамики к анализу нефизических (социальных, геологических, экономических и др.) систем.

Отдел радиоастрономии в Государственном астрономическом институте имени П. К. Штернберга (ГАИШ). В 1953 г. в ГАИШе был создан отдел радиоастрономии под руководством выдающегося советского ученого И. С. Шкловского [18]. Первыми сотрудниками отдела стали Б. М. Чихачев и студент 4-го курса механико-математического факультета МГУ Н. С. Кардашев. Будучи теоретиком, И. С. Шкловский тем не менее считал необходимым развивать прежде всего экспериментальные исследования. В 1955 г. в отдел был зачислен В. Г. Курт, в 1956 г. – В. И. Мороз. Позднее В. Ф. Есипов, Г. Б. Шоломицкий, Т. А. Лозинская, В. Н. Курильчик, М. И. Пашенко, В. И. Слыш, Л. М. Гиндилис и др. Это – первое поколение сотрудников отдела, большинство из которых были непосредственными учениками И. С. Шкловского. Затем В. И. Мороз создал группу инфракрасной астрономии, В. Г. Курт занялся внеатмосферными исследованиями, Н. С. Кардашев, В. И. Слыш, Г. Б. Шоломицкий и другие посвятили себя радиоастрономии, П. В. Щеглов и Т. А. Лозинская – оптической интерферометрии, В. Ф. Есипов – оптической спектроскопии, Л. М. Гиндилис – проблеме SETI.

К известным радиофизическим школам можно также отнести казанскую научную школу магнитной радиоспектроскопии, основателем которой был Е. К. Завойский, научную школу Р. В. Хохлова и С. А. Ахманова по нелинейной оптике, радиофизический семинар С. М. Рытова и др.

История радиофизики сквозь призму Нобелевских премий. Из-за невозможности отразить деятельность всех ученых, внесших решающий вклад в становление радиофизики, а также рассказать обо всех открытиях в этой области целесообразно провести исследование истории радиофизики в контексте самой престижной научной награды – Нобелевской премии. Анализ содержания радиофизических исследований, удостоенных Нобелевских премий по физике, позволил определить магистральные направления радиофизических исследований. К ним относятся радиотехника, радиоспектроскопия, информационные технологии, радиоастрономия [19]. Изучение истории развития и современных достижений магистральных направлений радиофизических исследований позволяет проследить эволюцию развития основных идей этой науки. При этом не должны оставаться без внимания основополагающие радиофизические исследования, не удостоенные этой научной награды.

История радиофизики как учебная дисциплина

В техническом вузе студенты изучают полноценный теоретический курс радиофизики, посвященный современным проблемам этой научной дисциплины. В педагогическом вузе изучение радиофизики имеет особый характер: будущие учителя приобретают необходимые знания и умения для преподавания этой дисциплины в школе. В то же время в педагогическом вузе не уделяется должного внимания истории развития, межпредметным связям и методологическим аспектам радиофизики.

На факультете физики и информационных технологий Московского педагогического государственного университета разработан и апробирован спецкурс «История радиофизики», предназначенный для студентов старших курсов, бакалавров, магистров и аспирантов физических специальностей университетов и педагогических вузов. Он реализован в виде мультимедийных лекций. По своей тематике спецкурс охватывает не только указанные четыре магистральные направления радиофизических исследований, но и учитывает междисциплинарные связи радиофизики и других областей знания. Помимо Нобелевских открытий в области радиофизики, обсуждаются исследования, не удостоенные этой награды, но имеющие высокое научное значение.

Подробный рассказ о спецкурсе «История радиофизики» не входит в задачу данной статьи. С его описанием, методикой проведения, тематикой лекций можно ознакомиться, например в [20].

Таким образом, к изучению истории радиофизики рационально применять комплексный подход, позволяющий представить эту науку как непрерывно эволюционирующий организм. Попробуем разработать *интегративную* теоретическую модель изучения истории радиофизики, которую в будущем можно применить к другим разделам современной физики. Отметим основные компоненты этой модели:

- физический, технический и гуманитарный аспекты радиофизики;
- характерные особенности радиофизики, как и всей современной физики: междисциплинарность научных исследований, широкое применение методов вычислительной математики, международная научная кооперация;

– гносеологические аспекты радиофизики: элементы теории познания, научные методы познания, история развития и современные достижения ключевых научных направлений;

– вклад отечественных ученых в зарождение и развитие радиофизики;

– применение качественных методов изучения истории радиофизики, современных информационных технологий (компьютерные модели, мультимедийные лекции, компьютерная база данных и др.) и статистических методов (анализ тематики Нобелевских премий, присужденных в области радиофизики, как основа футурологического прогноза возможных открытий);

– подходы к изучению истории радиофизики: исторические опыты в радиофизике, научные биографии творцов радиофизики, история создания радиофизических методов, приборов и устройств, научные школы в радиофизике, связь радиофизики с другими разделами физики и другими научными дисциплинами, в том числе гуманитарными, история радиофизики сквозь призму Нобелевских премий;

– дуальное представление истории радиофизики – самостоятельное направление в истории физики и учебная дисциплина в вузе.

Заключение

Отметим наиболее важные проблемы, задачи и перспективы истории радиофизики как предмета изучения.

1. Перед историей физики (в частности историей радиофизики) в настоящее время стоит множество задач, для решения которых нужны высококвалифицированные историки науки. Однако аспирантуры по истории физики фактически нет, защита кандидатских и докторских диссертаций по истории физики проходит от случая к случаю. Положение усугубляется тем, что история науки – чрезвычайно многосторонняя область знания [21]. Историк науки должен хорошо знать науку, обладать системным, а не фрагментарным видением научной проблемы, понимать межпредметные связи, владеть методами истории науки, в том числе и современными.

2. Изучение истории современной физики чрезвычайно важно при подготовке физиков-профессионалов любого профиля. Без знаний, расширяющих физический кругозор, ни один серьезный ученый состояться не может. На наш взгляд, спецкурсы типа «Современная физика», «Современная физика и астрофизика», курс «История физики» должны обязательно входить в образовательные программы университетов и институтов. Большую роль такие курсы играют в педагогических вузах, так как будущие учителя готовятся к преподаванию настоящей физической науки (включая ее современные достижения), в том числе в профильной школе. Отметим, что специальные курсы по различным направлениям современной физики часто представляют собой курсы по истории науки, так как в них широко используется исторический подход, а изложение ведется на качественном уровне без обращения к сложному математическому аппарату.

3. Важно понимать, что охватить все моменты развития радиофизической науки сложно: она богата по содержанию и множеству других аспектов. Тем не менее предложенная интегративная модель изучения истории радиофизики позволяет, во-первых, понять, что история радиофизики – важнейшее направление в истории физики, а во-вторых, рассмотреть ее как вузовскую

учебную дисциплину. Кроме того, модель позволяет изучать эту научную дисциплину с позиций ученого (историка науки), преподавателя вуза и студента. Конечно, для доказательства эффективности модели ее необходимо приложить к другим разделам современной физики.

4. Большинство публикаций по истории радиофизики посвящено истории того или иного направления радиофизики (например, книги М. А. Быховского по истории развития теории связи) или биографическим сведениям об ученых-радиофизиках (например, книги о жизни и научной деятельности А. С. Попова, Л. И. Мандельштама, Дж. К. Максвелла и др.). Кроме того, существуют некоторые периодические издания («Электросвязь», «Радио», «Успехи физических наук»), на страницах которых помещаются материалы по истории радиофизики и ее отдельных направлений.

В то же время главная задача истории радиофизики состоит в определении ее места в фундаментальной науке и технике. Изучение истории радиофизики предоставляет исследователям и инженерам возможность расширить свой кругозор, используя научные достижения предшествующих лет. Однако к настоящему времени указанная задача не только не решена, но попросту забыта. В силу ограниченности тиражей историко-физической литературы результаты научных исследований лишь в малой степени доступны широкому читателю. При этом вне их круга оказываются студенты, аспиранты радиотехнических специальностей вузов, молодые специалисты, которым и адресованы указанные издания. Таким образом, распространению знаний по истории радиофизики и радиотехники необходимо уделять значительно больше внимания (прежде всего в вузах, а также в школах и в дистанционном обучении).

Список литературы

1. **Гинзбург, В. Л.** О сверхпроводимости и сверхтекучести (что мне удалось сделать, а что не удалось), а также о «физическом минимуме» на начало XXI века / В. Л. Гинзбург // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174. – С. 1240.
2. **Вигнер, Ю.** Пределы науки / Ю. Вигнер // Экология и жизнь. – 2004. – № 6 (41) – С. 5–11.
3. **Новиков, А. М.** Методология учебной деятельности / А. М. Новиков. – М. : Эгвес, 2005. – 174 с.
4. Физика : большой энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – 4-е изд. – М. : Большая Российская энциклопедия, 1999.
5. **Михайлишина, Г. Ф.** Изучение современной физики в педагогическом вузе: содержание, методы и формы обучения : дис. ... канд. пед. наук / Михайлишина Г. Ф. – М., 2002. – 288 с.
6. **Ильин, В. А.** История физики / В. А. Ильин. – М. : Академия, 2003. – 272 с.
7. **Щербаков, Р. Н.** Великие физики как педагоги: от научных исследований – к просвещению общества / Р. Н. Щербаков. – М. : Бином, 2008. – 296 с.
8. **Кун, Т.** Структура научных революций / Т. Кун. – М. : Прогресс, 1975.
9. **Миллер, М. А.** Избранные очерки о зарождении и взрослении радиофизики в горьковско-нижегородских местах / М. А. Миллер. – Н. Новгород : Изд-во ИПФ РАН, 1997. – 224 с.
10. **Рытов, С. М.** Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы / С. М. Рытов. – М. : Наука, 1976. – 491 с.
11. **Лауэ, М.** История физики / М. Лауэ. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 230 с.
12. **Варламов, А.** Что такое ЯМР-томография? / А. Варламов, А. Ригамонти // Квант. – 2010. – № 1. – С. 8.

13. **Пайс, А.** Гении науки / А. Пайс. – М. : Институт компьютер. исслед., 2002. – 448 с.
14. **Мандельштам, Л. И.** Полное собрание трудов / Л. И. Мандельштам. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1948–1955.
15. **Хохлов, Д. Р.** О проблемах физической науки в современных условиях / Д. Р. Хохлов // Наука в вузах: математика, физика, информатика : тр. Междунар. науч.-образоват. конф. – М. : РУДН, 2009. – С. 263.
16. URL: http://www.biograph.ru/bank/gaponov-grehov_av.htm (электронный вариант биографии А. В. Гапонова-Грехова).
17. URL: http://www.sgu.ru/faculties/non-linear_processes/birthdaytrubeckov.php (электронный вариант статьи «Школа Д. И. Трубецкого»).
18. URL: <http://comet.sai.msu.ru/radio/history.html> (информация об отделе радиоастрономии ГАИШ).
19. **Кудрявцев, В. В.** История радиофизики в контексте Нобелевской премии / В. В. Кудрявцев, В. А. Ильин // История науки и техники. – 2009. – № 10. – С. 8.
20. **Кудрявцев, В. В.** Мультимедийный курс «История радиофизики» для педагогических вузов / В. В. Кудрявцев // Физическое образование: проблемы и перспективы развития : материалы VII Междунар. науч.-метод. конф. – М. : Школа Будущего, 2008. – Ч. 1. – С. 282.
21. **Кудрявцев, П. С.** О некоторых проблемах истории науки / П. С. Кудрявцев // История и методология естественных наук. – 1971. – № 10. – С. 3.

Кудрявцев Василий Владимирович

кандидат педагогических наук, ведущий редактор, редакция физики и математики, Издательский центр «Вентана-Граф» (г. Москва)

E-mail: basilio_84@mail.ru.

Kudryavtsev Vasily Vladimirovich

Candidate of pedagogic sciences, senior editor, physics and mathematics editorial office, Publishing center “Ventana-Graf” (Moscow)

Ильин Вадим Алексеевич

доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и экспериментальной физики, Московский педагогический государственный университет

E-mail: minjar@mail.ru

Ilyin Vadim Alekseevich

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of general and experimental physics, Moscow State Pedagogical University

УДК 537.86

Кудрявцев, В. В.

История радиофизики – важнейшее направление в истории физики / В. В. Кудрявцев, В. А. Ильин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 170–184.

УДК 538.95

В. А. Мартыненко, А. А. Ханугин, К. Н. Нищев, М. И. Новопольцев

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МОДУЛЕЙ С ПАЯНЫМИ КОНТАКТАМИ¹

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования напряженно-деформированных состояний в системе «кремний – керамика – металлокомпозит» на примере силового IGBT модуля с паяными контактами. Изучено влияние материалов элементов конструкции и технологии сборки модулей на остаточные напряжения в системе. Полученные данные могут быть использованы специалистами в области силовой электроники при проектировании и оценке показателей надежности полупроводниковых приборов, работающих в циклических режимах.

Ключевые слова: IGBT-модули, теплоотводы, металломатричные композиционные материалы, Al-SiC, механические напряжения, ANSYS.

Abstract. The article presents the results of numerical modelling of strain-stress states in the system of silicon-ceramic-metal matrix composite based on a power IGBT module with soldered contacts. The author explores the influence of materials used in the constructional units and the technology of modules assembling on residual voltages in the system. The results can be used by specialists in the field of power electronics when designing and assessing reliability indexes of semi-conductor devices under cycling duty.

Key words: IGBT-modules, heat-removals, metal matrix composites, Al-SiC, mechanical strain, ANSYS.

В настоящее время основным методом соединения элементов конструкции силовых полупроводниковых модулей является пайка относительно низкотемпературными припоями. Проблема прочности паяных соединений сложна, и для ее решения необходимо учитывать как свойства паяемых и припаяемых материалов, так и комплекс физико-химических и конструктивно-технологических факторов, отвечающих за формирование паяных соединений.

Особая роль в этом случае уделяется материалу припоя, который должен ограничивать воздействие остаточных термических напряжений, создавая условия для их равномерного распределения по всему объему переходной зоны между основными элементами конструкции: полупроводниковый кристалл – керамическая плата – основание.

Как показывают результаты экспериментальных исследований, наиболее уязвимыми областями в спаях являются границы соединений поверхностей полупроводникового кристалла с керамической платой и керамической платы с основанием модуля. Аналитические расчеты и численное моделирование показывают, что напряжения, возникающие в этих областях, зависят от величины механической и термической нагрузки. Чем меньше остаточные

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации комплексного проекта по договору №13.G25.31.0030 между Минобрнауки РФ и ОАО «Электровыпрямитель».

напряжения, возникающие в результате пайки, тем больше прочность соединения при условии, что на одну и ту же область одновременно воздействуют оба типа нагрузки. Существенную роль для прогнозирования прочностных свойств спаев играет выбор критерия для оценки оптимальной структуры и состава переходной зоны. Для измерения прочности соединения в качестве критерия часто используется максимальное растягивающее остаточное напряжение. Однако нельзя не учитывать влияния других составляющих на процесс разрушения. В качестве величины, определяющей меру повреждения, некоторые авторы предлагают использовать энергию упругой деформации в материале [1].

Для вычисления напряженно-деформированных состояний в неоднородных системах наиболее приемлемыми являются численные методы, в первую очередь, метод конечных элементов, широко используемый в современных программных пакетах анализа элементов конструкций, таких как COSMOS/ Design STAR, ANSYS, LS Dyna и т.п.

С математической точки зрения изучаемая проблема сводится к поиску вектора перемещений $U(x, y, z)$ – решения краевой задачи для системы уравнений несвязанной термоупругости. Данная задача может быть сведена к эквивалентной вариационной проблеме, состоящей в отыскании решения $U(x, y, z)$, соответствующего минимуму функционала свободной энергии [2]. При использовании данного метода энергия упругой деформации вычисляется суммированием значений упругой энергии для всех элементов исследуемой области

$$W_d = \sum s_{ij} \times \varepsilon_{ij} \times V_{ij}, \quad (1)$$

где W_d – энергия упругой деформации; s_{ij} и ε_{ij} – характерные значения напряжения и деформации для элемента, имеющего объем V_{ij} .

Считается, что минимальная упругая энергия, обусловленная остаточными термическими напряжениями, соответствует максимальной прочности спаев.

Для определения физико-механических характеристик межфазных областей спаев, а также влияния толщины и свойств промежуточных слоев на механические напряжения, рассматривается упрощенная 2D-модель силового полупроводникового модуля с паяными контактами. Расчеты проводились на примере конструкции выпускаемого в ОАО «Электровыпрямитель» IGBT-модуля, в котором теплоотводом является основание из металломатричного композиционного материала (ММКМ) Al-SiC (рис. 1).

На рис. 2 представлена 2D-модель многослойного паяного соединения IGBT-модуля со структурой Al – Si – Cu – AlN – Cu – Al-SiC.

Модель представляет собой структуру, образованную следующими основными компонентами:

- кристалл чипа IGBT толщиной 0,19 мм с контактами из алюминия и никеля толщиной 14 и 0,5 мкм соответственно;
- металлокерамическая плата DBC, состоящая из нитридной керамики толщиной 0,63 мм и медных слоев, создающих топологию электропроводящих контактов толщиной 0,3 мм;
- основание из ММКМ Al-SiC толщиной 3 мм с последовательно нанесенными слоями алюминия и никеля.

Соединение этих компонентов осуществляется при помощи двух последовательных операций пайки:

- пайка кристалла IGBT на плату DBC с помощью припоя 95,5Sn-3,8Ag-0,5Cu при температуре 320 °С;
- пайка DBC платы на основание из MMKM Al-SiC припоем 62,5Sn-37Pb-0,5Ag при температуре 250 °С.

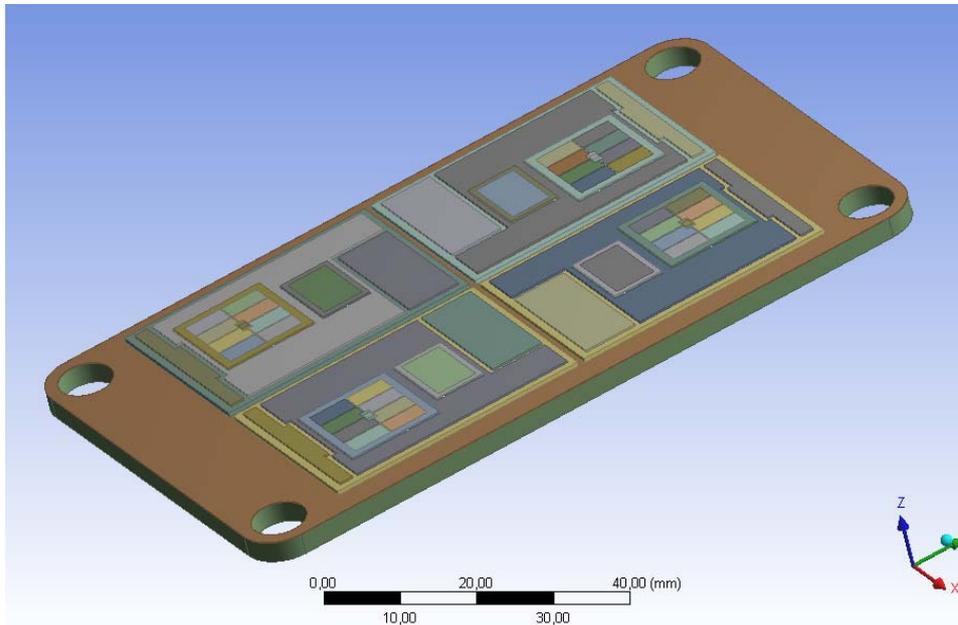


Рис. 1. Геометрическая 3D-модель IGBT-модуля с основанием из MMKM Al-SiC

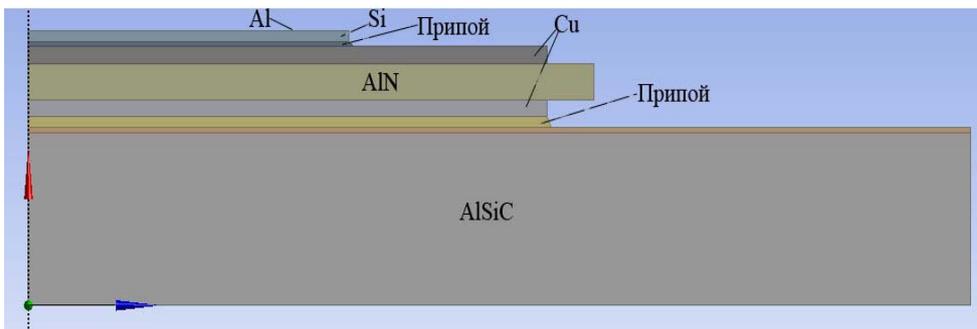


Рис. 2. 2D-модель IGBT-модуля

Эти два технологических процесса определяют основные остаточные механические напряжения, возникающие в слоях рассматриваемой структуры.

На рис. 3 показана двухмерная конечно-элементная модель многослойной паяной структуры модуля в плоскости xu с расчетной сеткой, созданной в программном комплексе ANSYS.

Предполагая, что в z -направлении модель не деформируется, можно использовать приближение плоской деформации в 2D-интерфейсе механики твердого тела. Полагая, что модель подвержена только тепловым нагрузкам, общие дифференциальные уравнения представляются в следующем виде:

$$\sigma = D\varepsilon_{eI} + \sigma_0 = D(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_0) + \sigma_0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{th} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_{th} = \alpha_{vec} (T - T_{ref}), \quad (3)$$

где σ – вектор напряжений; D – матрица эластичности; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ – компоненты деформации; α_{vec} – коэффициент термического расширения; T – температура; T_{ref} – начальная температура, при которой механические напряжения равны нулю.

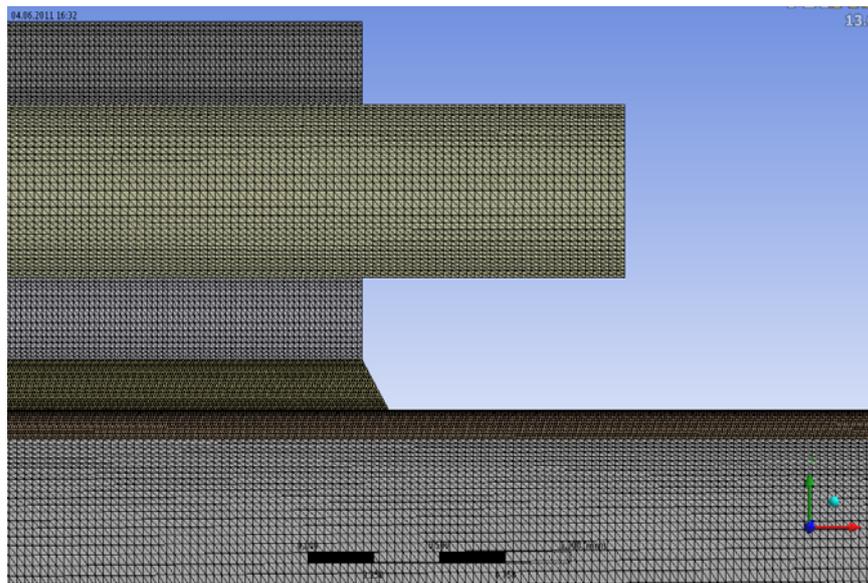


Рис. 3. Конечно-элементная модель многослойной паяной структуры IGBT-модуля

При расчете упругой энергии методом конечных элементов были приняты следующие допущения:

- внешнее воздействие отсутствует;
- материал составляющих элементов конструкции работает в пределах упругости на диаграмме $\varepsilon(\sigma)$;
- изменение упругих характеристик материала с изменением температуры не учитывается.

Для расчета механических напряжений и деформаций в контактных паяных соединениях по модели, описанной выше, достаточно четырех механических и тепловых параметров каждого из применяемых материалов. В табл. 1 приведены физические характеристики материалов, используемых в расчете.

Программный комплекс ANSYS позволяет задавать различные свойства материалов, включая их температурные зависимости. На рис. 4 приведена температурная зависимость коэффициента термического расширения (КТР) ММКМ Al-SiC, производимого фирмой CPS [3]. Для производства

IGBT-модулей используется ММКМ Al-SiC-9, в состав которого входят 37 % алюминия и 63 % карбида кремния.

Таблица 1

Материал	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент термического расширения, $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Плотность, кг/м^3
Al-SiC-9	188	0,237	См. рис. 4	3010
Кремний	131	0,266	4,2	2200
Медь	110	0,37	24	8900
Никель	210	0,31	17	8500
Алюминий	68	0,33	23,6	2700
Припой 95,5Sn-3,8Ag-0,5Cu	40	0,45	18	7000
Припой 2 62,5Sn-37Pb-0,5Ag	30	0,42	17	6700
Керамика нитридная AlN	345	0,22	4,5	3300

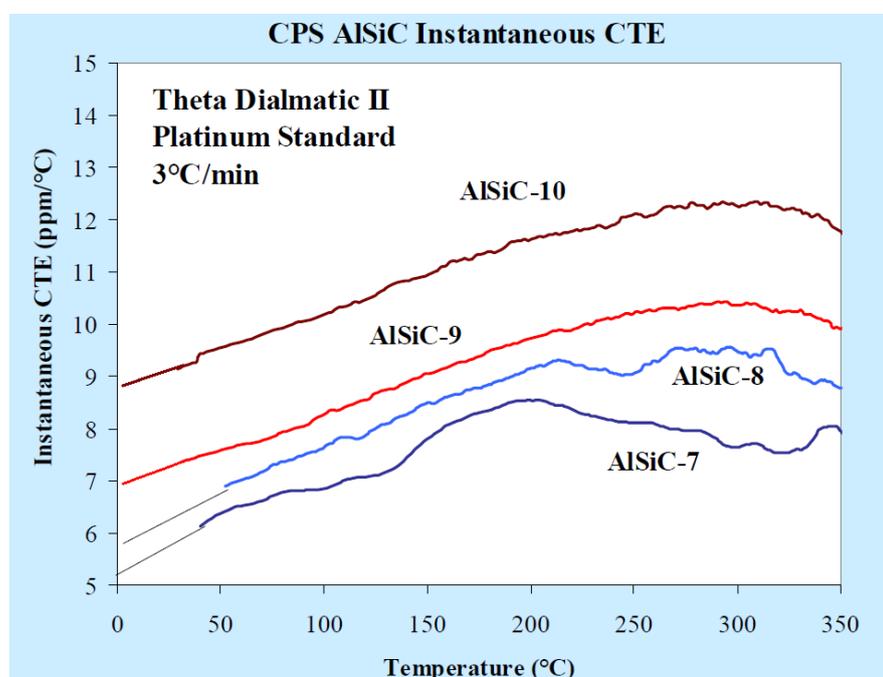


Рис. 4. Температурная зависимость коэффициента линейного термического расширения ММКМ Al-SiC [3]

Расчет модели многослойного паяного соединения связан со значительными трудностями, поскольку пайка контактирующих слоев происходит в разных технологических циклах при различных температурах T_{ref} . Расчетная модель может быть упрощена путем исключения слоев, слабо влияющих на напряженно-деформированное состояние всей системы, и разбиения расчета на несколько шагов, на каждом из которых моделируется только один технологический процесс.

Для модели, изображенной на рис. 3, нами использовался следующий алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) контактных соединений.

1 шаг: нагрев платы DBC от температуры $T_{ref} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ до температуры первой пайки $T = 350\text{ }^{\circ}\text{C}$ и передача рассчитанных параметров НДС во вторую модель.

2 шаг: соединение кристалла IGBT с платой DBC при помощи припоя 95,5Sn-3,8Ag-0,5Cu и охлаждение его от температуры $T_{ref} = 350\text{ }^{\circ}\text{C}$ до температуры второй пайки $T = 250\text{ }^{\circ}\text{C}$ и передача рассчитанных параметров НДС в третью модель.

3 шаг: соединение кристалла IGBT и платы DBC с основанием из ММКМ Al-SiC при помощи припоя 62,5Sn-37Pb-0,5Ag и охлаждение от температуры $T_{ref} = 250\text{ }^{\circ}\text{C}$ до комнатной температуры $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$.

По данному алгоритму были проведены расчеты НДС в паяных контактных соединениях IGBT модуля с основанием из ММКМ Al-SiC и IGBT модуля с медным основанием.

На рис. 5 представлено распределение НДС деформированной DBC платы на основе керамики AlN, нагретой до температуры первой пайки $350\text{ }^{\circ}\text{C}$. На данном рисунке хорошо видны области концентрации напряженного состояния на торцах DBC-платы – в местах контакта медного слоя с керамикой.



Рис. 5. Распределение механических напряжений в DBC-плате при температуре первой пайкой $350\text{ }^{\circ}\text{C}$ (деформация увеличена в 50 раз)

На рис. 6 приведены результаты расчета НДС DBC-платы с кристаллом IGBT при комнатной температуре ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$) после операции первой пайки (а) и при температуре $250\text{ }^{\circ}\text{C}$ на операции второй пайки (б).

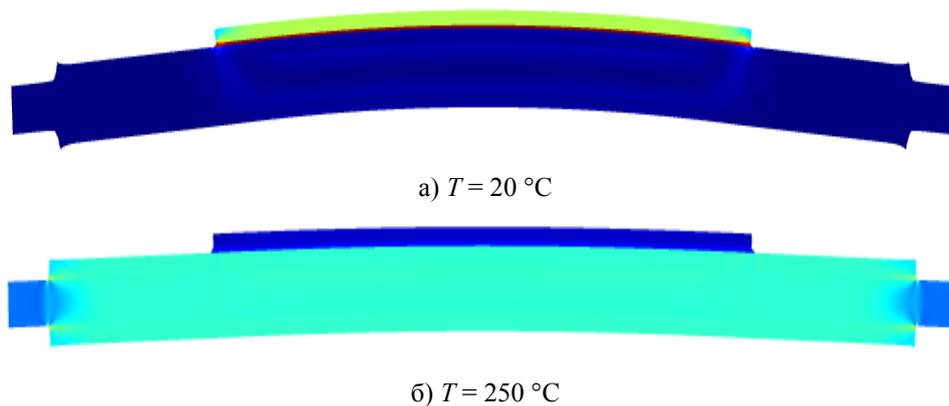


Рис. 6. Напряженно-деформированное состояние AlN DBC-платы с припаянным кристаллом IGBT при комнатной температуре (а) и в процессе второй пайки (б) (деформация увеличена в 40 раз)

Из рис. 6 следует, что после первой пайки максимальные напряжения в системе возникают в области спаиваемого кристалла кремния с DBC-платой. При нагреве до $T = 250\text{ }^{\circ}\text{C}$ эти напряжения уменьшаются.

На рис. 7 показаны НДС системы: кристалл – DBC-плата на основе керамики Al_2O_3 в тех же температурных условиях.

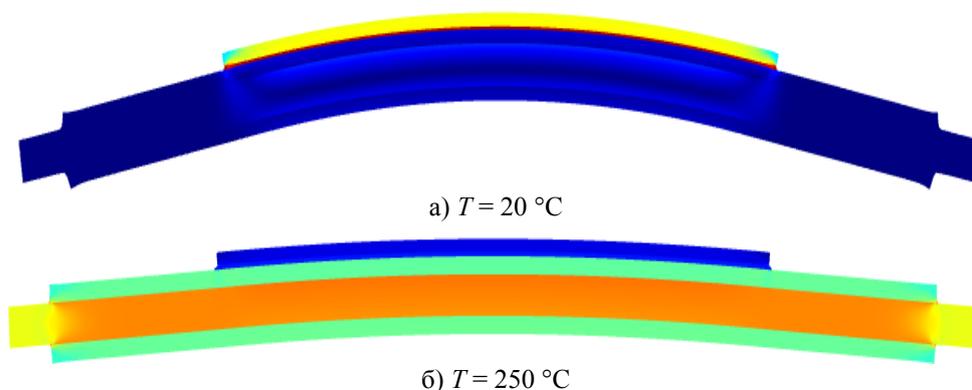


Рис. 7. Напряженно-деформированное состояние Al_2O_3 DBC-платы с припаянным кристаллом IGBT при комнатной температуре (а) и на операции второй пайки (б) (деформация увеличена в 40 раз)

На рис. 8 для сравнения приведены рассчитанные геометрические профили нижней части DBC-плат на основе керамики Al_2O_3 и AlN при комнатной температуре после операции первой пайки.

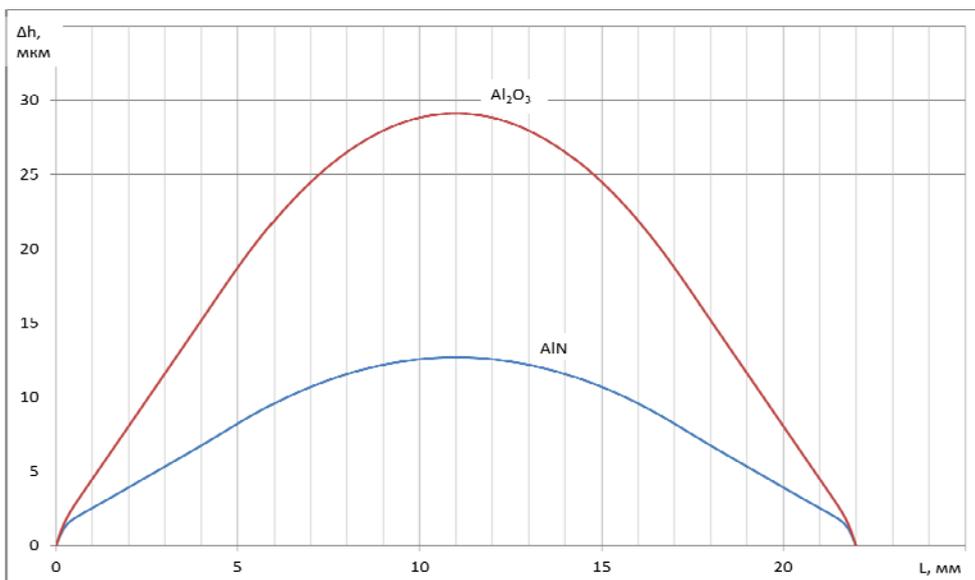


Рис. 8. Геометрический профиль нижней части DBC платы с припаянными IGBT кристаллами при комнатной температуре

Из представленных выше рисунков видно, что деформация плат и напряженно-деформированное состояние системы Al-Si-Cu-AlN-Cu значительно ниже, чем в случае системы $\text{Al-Si-Cu-Al}_2\text{O}_3\text{-Cu}$. Это можно объяснить

меньшей разностью КТР кремния и нитридной керамики по сравнению с разностью КТР кремния и оксидной керамики.

Дальнейшие расчеты напряженно-деформированных состояний в IGBT-модулях, в системе «кристалл – плата – основание» проводились для систем, состоящих из близких по КТР материалов. Для расчетов были выбраны следующие системы: Si – AlN – AlSiC и Si – Al₂O₃ – Cu.

На рис. 9 показаны результаты расчета НДС модели IGBT-модуля при комнатной температуре после операции второй пайки DBC платы на основание из ММКМ Al-SiC (а) и на медное основание (б).

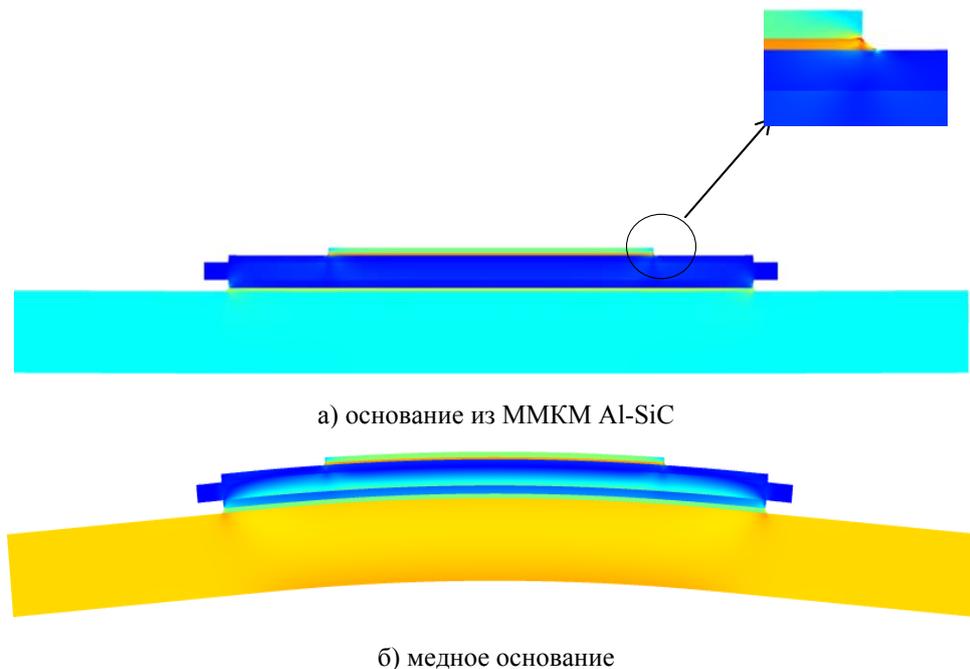


Рис. 9. Остаточное напряженно-деформированное состояние модели IGBT-модуля с основанием из ММКМ Al-SiC и медным основанием после операции пайки DBC платы на основание (деформация увеличена в 10 раз)

Из рис. 9 видно, что максимальные механические напряжения после второй пайки находятся в зоне контакта кристалл–припой. Видно также, что в системе с медным основанием и DBC-платой из Al₂O₃ в зоне между керамикой и слоем меди DBC-платы имеют место значительные напряжения (рис. 9,б). В системе AlN – Al-SiC (рис. 9,а) подобные напряжения не наблюдаются.

На рис. 10 показан геометрический профиль нижней плоскости медного основания IGBT-модуля и основания из ММКМ Al-SiC после операции второй пайки.

Для обеспечения минимальных контактных тепловых сопротивлений между IGBT-модулем и охладителем оптимальным является выпуклый профиль поверхности основания. Из этого следует, что металломатричный композиционный материал Al-SiC более предпочтителен в качестве материала теплоотводящих оснований IGBT-модулей.

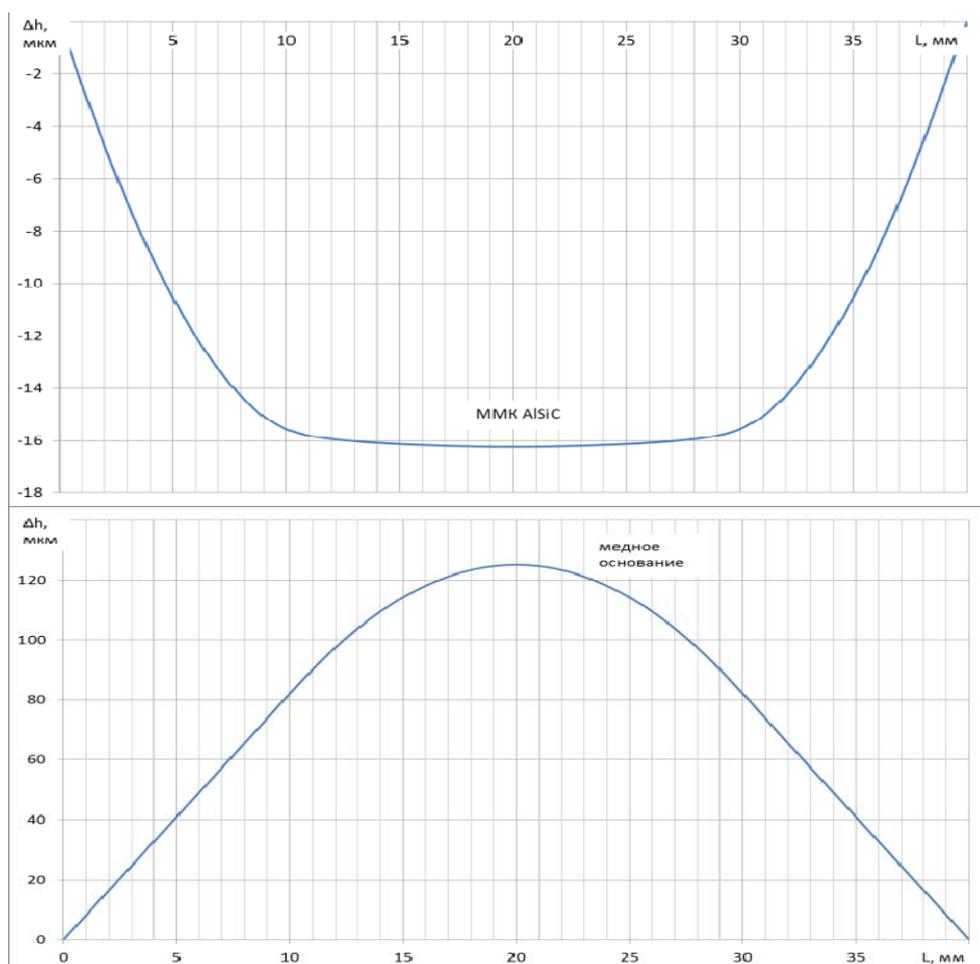


Рис. 10. Геометрический профиль нижней плоскости медного основания IGBT-модуля и основания из MMKM Al-SiC после операции второй пайки.

Положительные значения деформации показывают вогнутость, а отрицательные – выпуклость нижней поверхности оснований модулей

Список литературы

1. **Park, J.-W.** Strain energy distribution in ceramic to metal joints / J.-W. Park, P. F. Mendez, T. W. Eagar // Acta Materialia. – 2002. – V. 50. – P. 883–889.
2. **Мусин, Р. А.** Соединение металлов с керамическими материалами / Р. А. Мусин, Г. В. Конюшков. – М. : Машиностроение, 1991. – 224 с.
3. **Occhionero, M. A.** Cost-effective manufacturing of aluminum silicon carbide (AlSiC) electronic packages / Mark A. Occhionero, Robert A. Hay, Richard W. Adams, Kevin P. Fennessy // IMAPS Advanced Packaging Materials Symposium, 1999. – March 14–17.

Мартыненко Валентин Александрович
 директор научно-инженерного центра
 силовых полупроводниковых приборов
 «Электровыпрямитель» (г. Саранск)

Martynenko Valentin Alexandrovich
 Director of research engineering center
 of power semi-conducting devices
 “Electrovypryamitel” (Saransk)

E-mail: martin@moris.ru

Хапугин Алексей Александрович
начальник конструкторского бюро,
научно-инженерный центр силовых
полупроводниковых приборов
«Электровыпрямитель» (г. Саранск)

E-mail: martin@moris.ru

Нищев Константин Николаевич
кандидат физико-математических наук,
доцент, директор Института физики
и химии, Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: nishchev@inbox.ru

Новопольцев Михаил Ильич
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра общей физики,
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: novopol@inbox.ru

Khapugin Aleksey Alexandrovich
Head of designing department,
research engineering center of power
semi-conducting devices
“Electrovypryamitel” (Saransk)

Nishchev Konstantin Nikolaevich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, director
of the Institute of Physics and Chemistry,
Mordovia State University
named after N. P. Ogaryov (Saransk)

Novopoltsev Mikhail Ilyich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of general physics,
Mordovia State University
named after N. P. Ogaryov (Saransk)

УДК 538.95

Мартыненко, В. А.

Расчет напряженно-деформированных состояний в элементах конструкции силовых полупроводниковых модулей с паяными контактами / В. А. Мартыненко, А. А. Хапугин, К. Н. Нищев, М. И. Новопольцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 185–194.

УДК 535.32

О. А. Голованов, Г. С. Макеева, А. А. Ефимов, М. А. Чиркина

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОВОЛНОВОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА В 3D-МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ ИЗ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ¹

Аннотация. Впервые построена вероятностная электродинамическая модель микроволнового ферромагнитного резонанса (ФМР) в 3D-магнитных наноконкомпозитах из опаловых матриц в предположении, что магнитное поле ФМР H_r (каждой из магнитных наночастиц, находящихся в межсферной полости опаловой матрицы) является случайной величиной с распределением по нормальному закону. Для имитации случайной величины H_r используется генератор случайных чисел. Получены результаты расчета математического ожидания случайных величин $\text{Re}\mu^\Sigma$, $\text{Im}\mu^\Sigma$, $\text{Re}\mu_a^\Sigma$, $\text{Im}\mu_a^\Sigma$ (действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_a^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-наноконкомпозита на основе опаловой матрицы, содержащего наночастицы $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$) на частоте $f = 26$ ГГц в зависимости от постоянного магнитного поля H_0 при различных значениях параметра диссипации α магнитных наночастиц и среднеквадратического отклонения σ случайной величины H_r , определяемых типом структурного упорядочения 3D-наноконкомпозита.

Ключевые слова: вероятностная модель, магнитный 3D-наноконкомпозит, ферромагнитного резонанса, опаловая матрица.

Abstract. The authors have developed a unique probabilistic model of microwave ferromagnetic resonance (FMR) in 3D magnetic opal nanocomposites taking into account normal distribution of a random value H_r of FMR magnetic field of nanoparticles. To simulate the random value H_r the researchers use a random-number generator. The bias field dependences of the expectation values of random values $\text{Re}\mu^\Sigma$, $\text{Im}\mu^\Sigma$, $\text{Re}\mu_a^\Sigma$, $\text{Im}\mu_a^\Sigma$ (the real and imaginary parts of complex diagonal μ^Σ and off-diagonal μ_a^Σ components of the effective permeability tensor for the 3D $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$) particles-containing opal nanocomposites were obtained at a frequency $f = 26$ GHz for different values of damping parameter α of magnetic nanoparticles and the standard deviation σ of the random value H_r of the FMR magnetic field, determined by structure types of nanocomposites.

Key words: probabilistic model, 3D-magnetic nanocomposite, ferromagnetic resonance, opal matrix.

Введение

При исследовании 3D-магнитных наноконкомпозитов из опаловых матриц получен целый ряд теоретических и экспериментальных результатов на основе волноводных и резонансных измерений микроволнового ферромагнитного резонанса (ФМР) [1].

¹ Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 12-02-97025-р_поволжье_a.

Магнитные и микроволновые свойства наночастиц существенно отличаются от свойств массивного материала. Для них, в частности, характерно влияние вклада поверхности наночастиц в магнитную анизотропию, процессы суперпарамагнитной релаксации [2, 3]. Микроволновые свойства наночастиц, так же как и магнитные, зависят от размера частиц [4]: с уменьшением размера частиц намагниченность насыщения уменьшается, а остаточная намагниченность и коэрцитивная сила возрастают [4]. Характеристики линии ФМР, такие как значение поля резонанса, ширина и форма линии, зависят от размера наночастиц [5]. Наличие поверхностной анизотропии вызывает смещение резонансной частоты (резонансного поля) [6]. Величина и знак смещения резонансного поля зависят от ориентации оси наночастицы относительно внешнего постоянного резонансного поля [6].

Микроволновые магнитные свойства ансамблей наночастиц имеют определенную специфику [7, 8] и зависят от способа их получения и структурного состояния. Особенности магнитных свойств ансамбля магнитных частиц объясняются взаимодействиями в ансамбле, одной из причин коллективного поведения системы однодоменных магнитных частиц является их дипольное взаимодействие.

В реальных магнитных нанокомпозитах в межсферических пустотах опаловой матрицы магнитные наночастицы имеют геометрические формы, отличные от сфер. Частицы введенных в межсферические пустоты опаловой матрицы магнитных фаз имеют поликристаллическую структуру и характеризуются неправильной формой с размерами от 5 до 70 нм [1]. Магнитные фазы нанокомпозита состоят из частиц ферритмагнетика и суперпарамагнитных частиц.

Магнитный нанокомпозит состоит из множества случайным образом ориентированных частиц, различающихся величиной и формой, т.е. представляет собой неоднородную и довольно сложную магнитную систему, поэтому ФМР в такой системе заметно отличается от резонанса в монокристаллах. Резонансные спектры ФМР (т.е. зависимости поглощения от поля) характеризуются следующими особенностями: резонансные линии имеют большую ширину, резонансное значение поля смещено относительно его величины в монокристаллах.

Причины этих особенностей следует искать в магнитной анизотропии и внутренних размагничивающих полях, которые вследствие различной ориентации осей частиц по отношению к внутреннему магнитному полю приводят к пространственной неоднородности свободной энергии. Частота ФМР отдельно взятой магнитной частицы зависит от ее геометрической формы, размера и может существенно изменяться от частицы к частице.

В итоге каждая частица имеет свою частоту ФМР. Кроме того, следует учитывать дипольное взаимодействие магнитных моментов отдельных частиц, которое превращает магнитный нанокомпозит в систему из большого числа связанных резонаторов. Ширина резонансной кривой магнитного нанокомпозита в целом будет определяться суммарными резонансными кривыми магнитных наночастиц и их магнитными потерями. При этом задача нахождения резонансных спектров становится весьма сложной.

Для анализа эффективных электромагнитных параметров 3D-магнитных нанокомпозитов из опаловых матриц в целом и для изучения свойств от-

дельных магнитных наночастиц необходимы вероятностные теоретические модели, обеспечивающие адекватную интерпретацию измерений.

1. Детерминированная электродинамическая модель

На рис. 1 показана модель магнитного 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы из диэлектрических SiO₂ наносфер, который рассматриваем как квазипериодическую 3D-наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c .

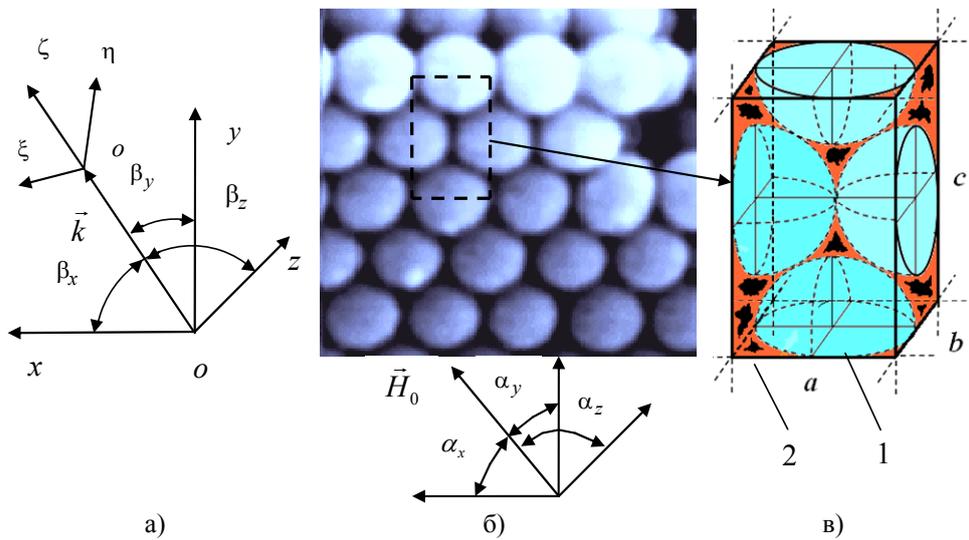


Рис. 1. Модель магнитного 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы:
 а – направление распространения волнового процесса;
 б – периодическая 3D-наноструктура и направление внешнего постоянного магнитного поля \vec{H}_0 ; в – моделирование ячейки периодической 3D-наноструктуры автономным блоком с каналами Флоке: 1 – диэлектрические SiO₂ наносферы, 2 – магнитные наночастицы

Электродинамическая модель волновых процессов в магнитных 3D-нанокompозитах строится на основе декомпозиционного подхода [9]. Область 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы (рис. 1,б) расчленяется условными границами на подобласти – автономные блоки с каналами Флоке (ФАБ), содержащие диэлектрические SiO₂ наносферы и внедренные в полости опаловой матрицы магнитные наночастицы (рис. 1,в).

Построение модели магнитного 3D-нанокompозита проводим поэтапно. На каждом из этапов считаем, что число N магнитных наночастиц сферической геометрии одинакового диаметра d в октаэдрической полости опаловой матрицы различно ($N = 1 \dots 5$), считая фактор заполнения полости магнитным компонентом постоянной величиной. При этом диаметры d магнитных наночастиц подбираются так, что суммарный объем заполнения полости магнитным компонентом во всех случаях остается одинаковым.

Введем тензор эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-нанокompозита, который является тензором второго ранга:

$$\tilde{\mu}^{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mu^{\Sigma} - i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & 0 \\ i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & \mu^{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z^{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

и эффективную диэлектрическую проницаемость ε^{Σ} , являющуюся скалярной величиной.

В этом случае компоненты μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , μ_z^{Σ} тензора эффективной магнитной проницаемости (1) и эффективная диэлектрическая проницаемость ε^{Σ} определяются из решения системы уравнений:

$$\Gamma_{\Sigma}^{+} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon^{\Sigma} (\mu^{\Sigma} + \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \quad (2a)$$

$$\Gamma_{\Sigma}^{-} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon^{\Sigma} (\mu^{\Sigma} - \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \quad (2б)$$

$$\Gamma_{\parallel}^{\Sigma} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon^{\Sigma} \mu_z^{\Sigma}}, \quad (2в)$$

$$\Gamma_{\perp}^{\Sigma} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon^{\Sigma} \mu_0 \frac{(\mu^{\Sigma})^2 - (\mu_{\alpha}^{\Sigma})^2}{\mu^{\Sigma}}}, \quad (2г)$$

где Γ_{Σ}^{+} , Γ_{Σ}^{-} – постоянные распространения продольных правополяризованной и левополяризованной волн, распространяющихся в неограниченной гирромагнитной среде в направлении постоянного поля подмагничивания $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$; Γ_{\parallel} , Γ_{\perp} – постоянные распространения поперечных обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в направлении, перпендикулярном полю подмагничивания $\vec{H}_0 = H_0 \vec{x}_0$; $\mu_z = 1$ [10].

Система уравнений (2) относительно неизвестных μ , μ_{α} , ε (параметров сплошной гирромагнитной среды) является совместной, т.е., как известно [10], имеет решение, притом единственное. В этом случае искомые значения трех неизвестных μ , μ_{α} , ε можно определить из аналитического решения уравнений (2), отбросив одно из уравнений, например уравнение (2в) (при этом единственность решения не нарушается). Для магнитного нанокompозита вводим эффективные электромагнитные параметры μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , ε^{Σ} . Тогда для рассматриваемого случая система уравнений (2) является квазисовместной относительно неизвестных μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , ε^{Σ} .

Квазисовместная система уравнений (2) имеет решение относительно μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , ε^{Σ} , если выполняется условие

$$(\Gamma_{\perp}^{\Sigma})^2 - \frac{2(\Gamma_{\Sigma}^{+})^2(\Gamma_{\Sigma}^{-})^2}{(\Gamma_{\Sigma}^{+})^2 + (\Gamma_{\Sigma}^{-})^2} = 0. \quad (3)$$

В этом случае значения μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ определяются из (2) следующим образом:

$$\begin{cases} \mu^\Sigma = \frac{(\Gamma_\Sigma^+ / k_0)^2 + (\Gamma_\Sigma^- / k_0)^2}{2\varepsilon^\Sigma}, \\ \mu_\alpha^\Sigma = \frac{(\Gamma_\Sigma^+ / k_0)^2 - (\Gamma_\Sigma^- / k_0)^2}{2\varepsilon^\Sigma}, \\ \varepsilon^\Sigma = (\Gamma_\parallel^\Sigma / k_0)^2, \end{cases} \quad (4)$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Значения μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , определенные из решения квазисовместной системы уравнений (2), будут лишь с некоторой точностью удовлетворять условию (3).

На рис. 2 представлены результаты расчета относительной погрешности Δ (%) совместной выполнимости условия (3) для Γ_Σ^+ , Γ_Σ^- , Γ_\parallel^Σ , Γ_\perp^Σ (невязки квазисовместной системы уравнений (2)) в зависимости от относительной величины $H_0^{\text{отн}} = \frac{H_0 - H_r}{H_r}$, где H_0 – напряженность внешнего постоянного магнитного поля, H_r – магнитное поле ферромагнитного резонанса.

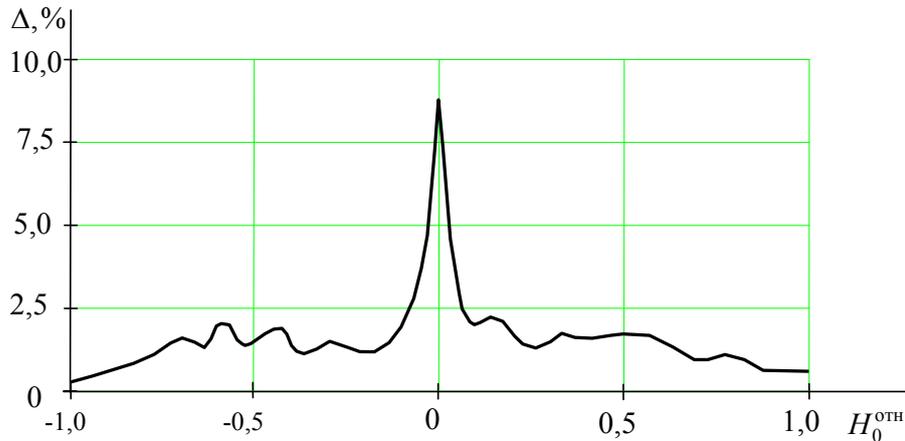


Рис. 2. Относительная погрешность определения эффективных электромагнитных параметров μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ при изменении Γ_Σ^+ , Γ_Σ^- , Γ_\parallel^Σ , Γ_\perp^Σ в зависимости от относительной величины $H_0^{\text{отн}}$

По этой точности можно судить о степени правомерности введения предлагаемой модели расчета эффективных электромагнитных параметров μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ для 3D-магнитного нанокompозита – наноструктурированной гирромагнитной среды как квазисплошной.

На основе развитой методики из характеристического уравнения [11] рассчитаны постоянные распространения продольных Γ_{Σ}^{+} , Γ_{Σ}^{-} и поперечных Γ_{\parallel} , Γ_{\perp} волн (нулевой пространственной гармонике $\Gamma_0 = \nu$), и в результате решения системы уравнений (2) относительно неизвестных μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , ε_1^{Σ} получены комплексные значения эффективных электромагнитных параметров – компонент μ^{Σ} , μ_{α}^{Σ} , тензора эффективной магнитной проницаемости μ_1^{Σ} , μ_2^{Σ} и эффективной диэлектрической проницаемости ε^{Σ} .

На рис. 3 показаны результаты математического расчета зависимости действительной части $\text{Re}\mu^{\Sigma}$ диагональной μ^{Σ} компоненты тензора эффективной магнитной проницаемости 3D-магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы от относительной величины $H_0^{\text{отн}} = \frac{H_0 - H_r}{H_r}$ постоянного магнитного поля на частоте $f = 26$ ГГц ($H_r = 9180$ Э).

Кривые 1–4 на рис. 3 получены при различном числе N учитываемых в модели магнитных наночастиц сферической геометрии диаметра d , при этом фактор заполнения полости опаловой матрицы считается постоянной величиной.

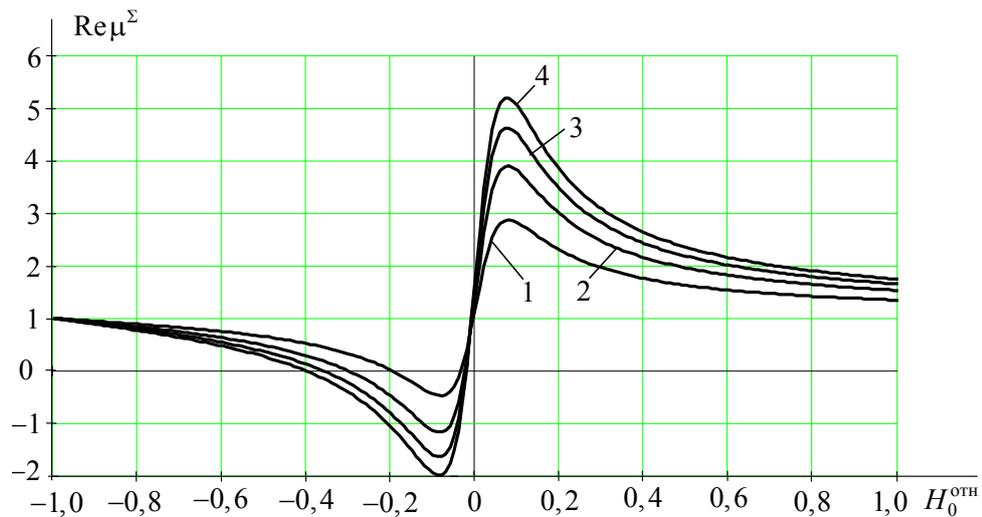


Рис. 3. Расчетные зависимости действительной части $\text{Re}\mu^{\Sigma}$ диагональной компоненты μ_1^{Σ} тензора эффективной магнитной проницаемости 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы от относительной величины $H_0^{\text{отн}}$ постоянного магнитного поля при различном числе N учитываемых в модели магнитных наночастиц: $f = 26$ ГГц; SiO_2 наносферы; магнитные наночастицы $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$; кривые: 1 – $N = 1$, $d = 50$ нм; 2 – $N = 3$, $d = 35$ нм; 3 – $N = 4$, $d = 31$ нм; 4 – $N = 5$, $d = 29$ нм

Магнитный 3D-наноккомпозит на основе опаловой матрицы из диэлектрических наносфер SiO_2 (радиус наносфер $r = 100$ нм, относительные комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости $\varepsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$, $\mu_v = 1$) в модели октаэдрические межсферные полости (рис. 1,в) заполнены N магнитными наночастицами; материал наночастиц $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (намагниченность насыщения $4\pi M_S = 5000$ Гс, константа обменного взаимодействия $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9}$ Э·см², параметр диссипации $\alpha = 0,08$, комплексная диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon} = 9,5 - i0,3$).

Как показывает анализ результатов (рис. 3), при увеличении числа $N = 1-5$ учитываемых в модели магнитных наносфер с уменьшением их геометрических размеров ($d = 50-29$ нм) и сокращении расстояния между ними до длины обменного взаимодействия последнее начинает играть доминирующую роль и эффективная магнитная проницаемость наноккомпозита возрастает (кривые 3, 4).

На рис. 4 показаны результаты расчета зависимостей действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-наноккомпозита от относительной величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля $H_0^{\text{отн}} = \frac{H_0 - H_r}{H_r}$, где для сравнения приведены также экспериментальные зависимости [12]. Параметры наноккомпозита те же, что и на рис. 3, число учитываемых в модели магнитных наночастиц $N = 5$.

Эффективная диэлектрическая проницаемость магнитного наноккомпозита практически не изменяется и имеет значение, равное $\varepsilon_\Sigma = 4,87 - i0,03$.

Наилучшее совпадение результатов моделирования с экспериментом наблюдается в модели, учитывающей наибольшее из рассмотренных число магнитных наночастиц $N = 5$ с минимальным диаметром ($d = 29$ нм).

2. Вероятностная модель и результаты расчета компонентов тензора эффективной магнитной проницаемости

Теории ФМР в ультрадисперсных средах [14–17] могут быть разделены на две различные группы.

Один подход использует предположение о том, что отдельные частицы можно рассматривать как независимые [14–16]. Влияние окружения проявляется только глобально, посредством определенной модификации индивидуальных резонансных условий частицы. Кривая резонансного поглощения системы определяется как суперпозиция резонансных кривых отдельных частиц. Такой подход, очевидно, оправдан только тогда, когда дипольное взаимодействие между магнитными моментами сравнительно слабо.

Альтернативными являются теории [17], где весь образец рассматривается как единая система. Они применяются в тех случаях, когда дипольное взаимодействие между частицами очень сильно и преодолевает анизотропию. Прецессия возникает сразу во всем образце (отдельные осцилляторы синхронизируются вследствие сильной связи). Магнитная анизотропия, точнее ее вариации от частицы к частице, представляет собой возмущение для такого коллективного прецессионного движения и приводит к тому, что первона-

начально однородная прецессия превращается в неоднородную магнитостатическую прецессию [17]. Поскольку эта ситуация характерна для концентрированных ультрадисперсных систем, имеет смысл ограничиться в нашей модели первым представлением, при котором возможно говорить об индивидуальном резонансе в каждой частице.

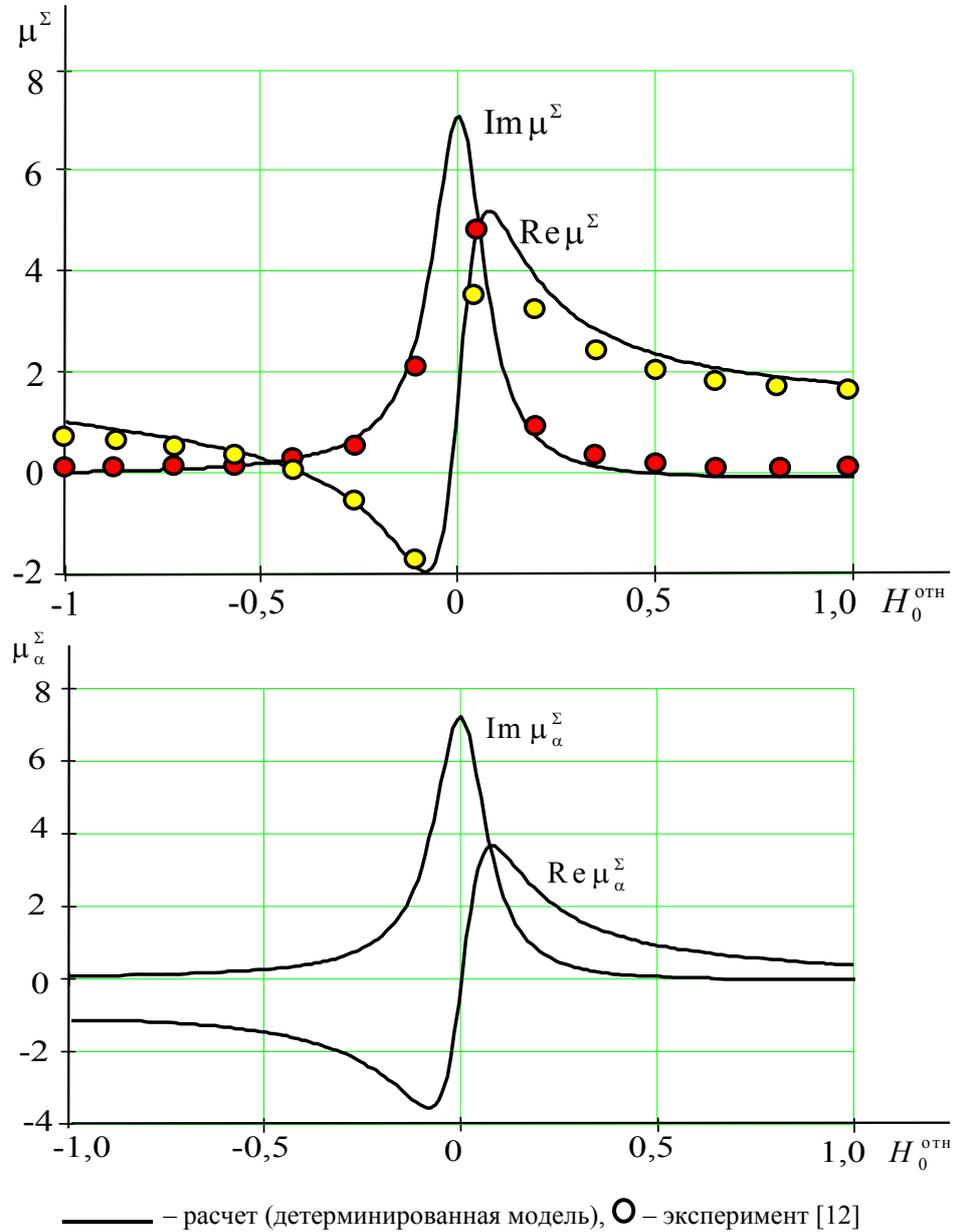


Рис. 4. Зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы, содержащего магнитные наночастицы $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$, от относительной величины постоянного магнитного поля H_0^{OTN} : $f = 26$ ГГц, $N = 5$, $d = 29$ нм

Вероятностная модель для определения эффективных значений параметров тензора магнитной проницаемости 3D-нанокompозита, так же как и детерминированная электродинамическая модель, строится на уровне отдельно взятой ячейки периодической структуры.

Вероятностную модель микроволнового ФМР в магнитных 3D-нанокompозитах создаем следующим образом. Полагаем, что магнитное поле ФМР H_r каждой из магнитных наночастиц, находящихся в межсферной полости ФАБ (рис. 1,в), является случайной величиной. Будем считать, что случайная величина H_r распределена по нормальному закону [13]:

$$f(H_r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(H_r - H_r^0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $f(H_r)$ – плотность вероятности; H_r^0 – математическое ожидание случайной величины H_r ; σ – среднеквадратическое отклонение.

Вероятностная модель является имитационной. Используем генератор случайных чисел, распределенных по нормальному закону, для имитации случайной величины H_r (резонансного магнитного поля H_r каждой из магнитных наночастиц в полости). Для того чтобы определить реализации случайных функций, в вероятностной модели учитываем распределение случайной величины H_r , полученное из имитации.

На первом этапе, используя детерминированную электродинамическую модель, определяем компоненты μ^Σ , μ_α^Σ тензора эффективной магнитной проницаемости и диэлектрической проницаемости ε^Σ 3D-магнитного нанокompозита как функции внешнего постоянного магнитного поля.

На втором этапе в вероятностной модели определяем реализации случайных функций $\mu^\Sigma(H_r)$, $\mu_\alpha^\Sigma(H_r)$, учитывая нормальное распределение случайной величины H_r , полученное из имитации. Затем по реализациям случайных функций $\mu^\Sigma(H_r)$, $\mu_\alpha^\Sigma(H_r)$ определяем математические ожидания [13] случайных величин μ^Σ , μ_α^Σ .

На рис. 5 показаны результаты расчета значений математического ожидания случайных величин $\text{Re}\mu^\Sigma$, $\text{Im}\mu^\Sigma$, $\text{Re}\mu_\alpha^\Sigma$, $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$ (действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-нанокompозита) от внешнего постоянного магнитного поля H_0 при различных значениях α (параметр диссипации магнитных наночастиц) и σ (среднеквадратическое отклонение) случайной величины H_r (магнитное поле ФМР наночастиц), определяемых типом структурного упорядочения 3D-нанокompозита.

Вероятностная модель построена на базе детерминированной модели (параметры 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы, содержащего наночастицы $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$, те же, что и на рис. 3), число учитываемых в модели магнитных наночастиц $N = 4$ ($d = 31\text{нм}$).

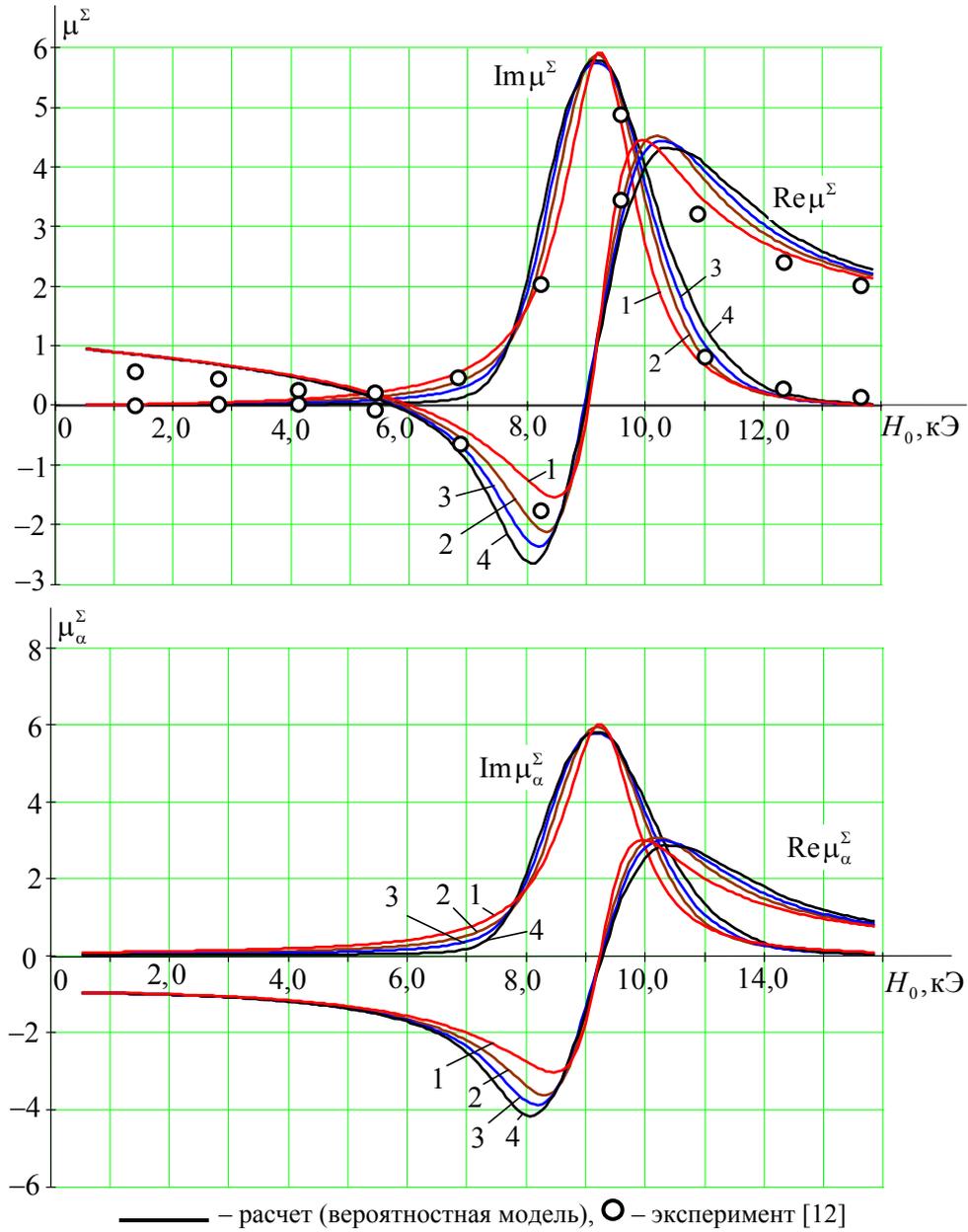


Рис. 5. Зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-нанокompозита на основе опаловой матрицы, содержащего наночастицы $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$, от постоянного магнитного поля: $f = 26$ ГГц, $N = 4$ ($d = 31$ нм); кривые: 1 – $\alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180$ Э, $\sigma = 0$; 2 – $\alpha = 0,05$, $H_r^0 = 9230$ Э, $\sigma = 535$ Э; 3 – $\alpha = 0,03$, $H_r^0 = 9250$ Э, $\sigma = 722$ Э; 4 – $\alpha = 0,006$, $H_r^0 = 9270$ Э, $\sigma = 895$ Э

Расчетные характеристики ФМР, такие как значение поля резонанса, ширина и форма резонансных кривых (рис. 5, кривые 1–4) для всех вышепе-

речисленных случаев расчетных параметров ($\alpha = 0,08; 0,05; 0,03; 0,06$ и $\sigma = 0, 535, 722, 893$ Э, соответственно) в достаточной мере согласуются с экспериментом [12]. Однако физические явления, приводящие к такому результату, различны и зависят от структуры магнитных наноконпозитов.

В первом случае (кривая 1 на рис. 5) ширина кривой ФМР обусловлена только достаточно большими магнитными потерями каждой из наночастиц $\alpha = 0,08$ (при этом $\sigma = 0$). В других случаях (кривые 2–4 на рис. 5) ширина кривых ФМР определяется как магнитными потерями α наночастиц, так и среднеквадратическим отклонением α .

Вдали от ФМР ($H_0 < H_r^0$) значения математического ожидания случайных величин $\text{Im}\mu^\Sigma$, $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$ (мнимой части диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости, определяющих магнитные потери наноконпозита) (кривые 1–4 на рис. 6) существенно отличаются. Наименьшие магнитные потери имеет наноконпозит со структурой $\alpha = 0,006$, $H_r^0 = 9270$ Э, $\sigma = 895$ Э (кривая 4), наибольшие потери – со структурой $\alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180$ Э, $\sigma = 0$ (кривая 1). Значения отличаются почти на порядок.

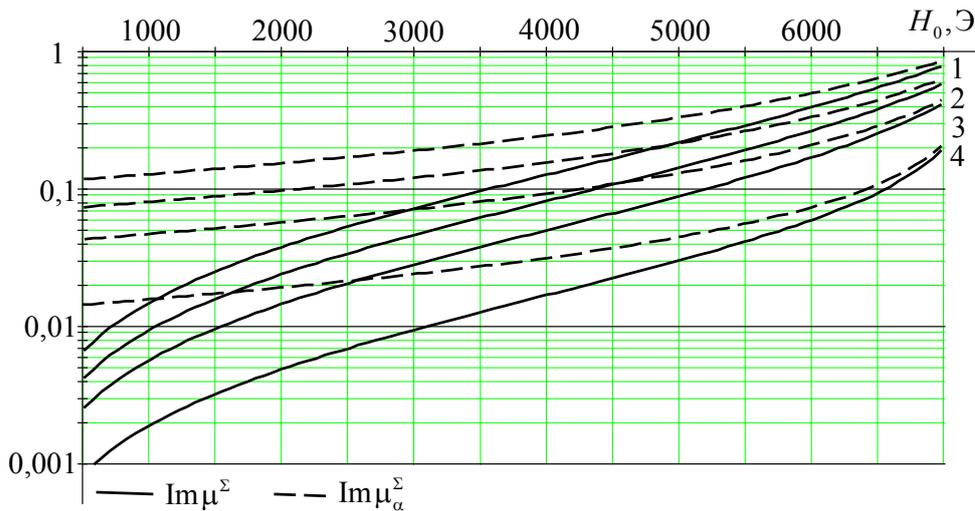


Рис. 6. Магнитные потери 3D-наноконпозитов с различным типом структурного упорядочения в зависимости от постоянного магнитного поля вдали от ФМР:

$f = 26$ ГГц, $N = 4$ ($d = 31$ нм); кривые: 1 – $\alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180$ Э, $\sigma = 0$;

2 – $\alpha = 0,05$, $H_r^0 = 9230$ Э, $\sigma = 535$ Э; 3 – $\alpha = 0,03$, $H_r^0 = 9250$ Э, $\sigma = 722$ Э;

4 – $\alpha = 0,006$, $H_r^0 = 9270$ Э, $\sigma = 895$ Э

Идентифицировать структуру экспериментально полученного магнитного наноконпозита можно по магнитным потерям вдали от ФМР (рис. 6). В работе [12] такие данные отсутствуют, поэтому трудно судить о структуре магнитного наноконпозита, полученного экспериментально.

Заключение

Впервые предложена вероятностная математическая модель, описывающая явление ФМР в 3D-магнитных нанокompозитах из опаловых матриц на электродинамическом уровне строгости. Модель позволяет в приближении эффективной среды рассчитать компоненты тензора эффективной магнитной проницаемости при различных значениях параметра диссипации, характеризующий магнитные потери наночастицы и среднеквадратического отклонения случайной величины магнитного поля ФМР наночастиц, зависящего от структуры магнитного нанокompозита.

Выбранная вероятностная модель ФМР в системе магнитных наночастиц в нанокompозитах действительно оказалась достаточно реалистичной: с ее помощью удается описать особенности микроволновых свойств 3D-магнитных нанокompозитов из опаловых матриц в области внешних магнитных полей, соответствующих условиям ФМР. Это дает основание надеяться, что полученные зависимости могут быть использованы в качестве ориентира и в исследованиях электродинамических процессов в реальных нанокompозитах.

Предложенная вероятностная математическая модель явления ФМР в нанокompозитах может быть использована для создания компьютерных методов анализа микроволновых свойств новых композиционных магнитных материалов с различным типом структурного упорядочения при создании СВЧ-устройств.

Список литературы

1. **Ринкевич, А. Б.** Магнитный резонанс в опаловых матрицах с 3D-структурой, образованной наночастицами никель-цинкового и марганец-цинкового феррита / А. Б. Ринкевич, В. В. Устинов, М. И. Самойлович и др. // *Высокие технологии в промышленности России (Материалы и устройства функциональной электроники и микрофотоники)* : сб. тр. XIII Междунар. науч.-техн. конф. – М., 2007.
2. **Mitsuteru, I.** Magnetophotonic crystals / I. Mitsuteru // *Proceedings of the MRS Symposium J, Magneto-Optical Materials for Photonics and Recording (Boston)*. – 2004. – November. – P. 32.
3. **Monzon, C.** Three-Dimensional Focusing of Broadband Microwave Beams by a Layered Photonic Structure / C. Monzon, P. Loschialpo, D. Smith et al. // *Phys. Rev. Letters*. – 2006. – V. 96. – P. 207402.
4. **Usadel, K. D.** Ferrite thin films for microwave applications / K. D. Usadel // *J. Magn. & Magn. Mater.* – 2007. – V. 308. – P. 137.
5. **Usadel, K. D.** Temperature-dependent dynamical behavior of nanoparticles as probed by ferromagnetic resonance using Landau-Lifshitz-Gilbert dynamics in a classical spin model / K. D. Usadel // *Phys. Rev.* – 2006. – V. B73. – P. 212405
6. **Shilov, V. P.** Ferromagnetic resonance in ferrite nanoparticles with uniaxial surface anisotropy / V. P. Shilov, J.-C. Bacri, F. Gazeau et al. // *J. Appl. Phys.* – 1999. – V. 85, № 9. – P. 6642–6647.
7. **Shilov, V. P.** Effect of unidirectional anisotropy on the ferromagnetic resonance in ferrite nanoparticles / V. P. Shilov, J.-C. Bacri, F. Gazeau et al. // *Phys. Rev. B*. – 1999. – V. 60. – P. 11902–11905.
8. **Alves, C. R.** Superparamagnetic relaxation evidences large surface contribution for the magnetic anisotropy of MnFe₂O₄ nanoparticles of ferrofluids. 4th Brazilian MRS

- Meeting, February 2007 / C. R. Alves, R. Aquino, J. Depeyrot et al. // Journal of Materials Science. – 2007. – V. 42. – № 7. – P. 2297–2303.
9. **Нua Su.** Effects of nanocrystalline ferrite particles on densification and magnetic properties of the NiCuZn ferrites / Hua Su, Huaiwu Zhang, Xiaoli Tang, Yingli Liu // J. Mater. Sci. 2007. V.42. p.2849–2853A.
 10. **Никольский, В. В.** Декомпозиционный подход к задачам электродинамики / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1983. – 297 с.
 11. **Гуревич, А. Г.** Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – М. : Наука, 1994.
 12. **Голованов, О. А.** Электродинамический анализ распространения электромагнитных волн в 3D-магнитных нанокомпозитах на основе опаловых матриц / О. А. Голованов, Г. С. Макеева, М. А. Чиркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 126–135.
 13. **Ustinov, V. V.** Anomalous magnetic antiresonance and resonance in ferrite nanoparticles embedded in opal matrix / V. V. Ustinov, A. B. Rinkevich, D. V. Perov et al. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2012. – V. 324. – P. 78–82.
 14. **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Физматлит, 1962. – 637 с.
 15. **Morrish, A. H.** Ferrimagnetic resonance of iron-oxide micropowders / A. H. Morrish, E. P. Valstyn // J. Phys. Soc. Japan. – 1961. – V. 17. – P. 392–395.
 16. **Valstyn, E. P.** Ferromagnetic resonance of singledomainparticles / E. P. Valstyn, J. P. Hanton, A. H. Morrish // Phys. Rev. – 1962. – V. 128, № 5. – P. 2078–2087.
 17. **Sharma, V. K.** Superparamagnetic effects in the ferromagnetic resonance of silica supported nickel particles / V. K. Sharma, A. Baiker // J. Chem. Phys. – 1981. – V. 75, № 12. – P. 5596–5601.
 18. **Raikher, Yu. L.** Intrinsic magnetic resonance in superparamagnetic systems / Yu. L. Raikher, V. I. Stepanov // Phys. Rev. B. – 1995. – V. 51. – P. 16428–16431.

Голованов Олег Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и начертательной геометрии,
Филиал Военного учебно-научного
центра Сухопутных войск
«Общевойсковая академия
Вооруженных Сил РФ» (г. Пенза)

E-mail: golovanovol@mail.ru

Golovanov Oleg Alexandrovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and descriptive geometry,
branch of the Military research and
educational center of the Land Forces
“Combined Arms Academy of the Armed
Forces of the Russian Federation” (Penza)

Макеева Галина Степановна

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра радиотехники
и радиоэлектронных систем, Пензенский
государственный университет

E-mail: radiotech@pnzgu.ru

Makeeva Galina Stepanovna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department of radio
engineering and radio electronic systems,
Penza State University

Чиркина Марина Александровна

кандидат технических наук, доцент,
кафедра прикладной математики
и информатики, Пензенский
государственный архитектурно-

Chirkina Marina Alexandrovna

Candidate of engineering sciences,
associate professor, sub-department
of applied mathematics and informatics,
Penza State University of Architecture

строительный университет

and Construction

E-mail: chm-77@mail.ru

Ефимов Алексей Андреевич

адъюнкт, кафедра радиотехнических систем, Филиал Военного учебно-научного центра Сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных сил РФ» (г. Пенза)

Efimov Aleksey Andreevich

Postgraduate student, sub-department of radioengineering systems, branch of the Military research and educational center of the Land Forces “Combined Arms Academy of the Armed Forces of the Russian Federation” (Penza)

E-mail: renegat555@yahoo.com

УДК 535.32

Голованов, О. А.

Вероятностная модель микроволнового магнитного резонанса в 3D-магнитных нанокompозитах из опаловых матриц / О. А. Голованов, Г. С. Макеева, А. А. Ефимов, М. А. Чиркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 195–208.

Внимание авторов!

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий не выше 2003.

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru, дискета 3,5", CD-диск) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах.

Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полуторный интервал. Тип файла в электронном виде – RTF.

Статья **обязательно** должна сопровождаться индексом УДК, краткой аннотацией и ключевыми словами **на русском и английском языках**.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

Формулы в тексте статьи выполняются в редакторе формул Microsoft Word Equation, версия 3.0 и ниже. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. В списке указывается:

- для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц;
- для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, выпуск, страницы;
- для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, время и место проведения конференции, город, издательство, год, страницы.

В конце статьи допускается указание наименования программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

К материалам статьи **должна** прилагаться информация для заполнения учетного листа автора: фамилия, имя, отчество, место работы и должность, ученая степень, ученое звание, адрес, контактные телефоны (желательно сотовые), e-mail.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукопись, полученная редакцией, не возвращается.

Редакция оставляет за собой право проводить редакторскую и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год по тематике:

- ***математика***
- ***физика***
- ***механика***

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс (841-2) 36-84-87, тел.: 36-84-87, 56-47-33; E-mail: VolgaVuz@mail.ru

Подписку на второе полугодие 2012 г. можно также оформить по каталогу агентства «РОСПЕЧАТЬ» «Газеты. Журналы», тематический раздел «Известия высших учебных заведений». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 2012 г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата «____» _____ 2012 г.